NGUYỄN MỘNG HY (Chủ biên)
NGUYỄN VĂN ĐOÀNH - TRẦN ĐỨC HUYÊN

BÀI TẬP HÌNH HỌC 10



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

NGUYỄN MỘNG HY (Chủ biên)
NGUYỄN VĂN ĐOÀNH – TRẦN ĐỨC HUYÊN

BÀI TẬP HÌNH HỌC 10

(Tái bản lần thứ năm)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

01-2011/CXB/815-1235/GD

Mã số : CB004T1

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách BÀI TẬP HÌNH HỌC 10 được biên soạn nhằm giúp cho học sinh lớp 10 có điều kiện tham khảo và tự học để nắm vững các kiến thức và các kĩ năng cơ bản đã được học trong Sách giáo khoa Hình học 10. Nội dung cuốn sách bám sát nội dung của sách giáo khoa mới, phù hợp với chương trình mới của Bộ Giáo dục và Đào tạo vừa ban hành năm 2006. Cuốn sách bài tập này được viết theo tinh thần tạo điều kiện để góp phần đổi mới phương pháp dạy và học, nhằm phát huy được khả năng tự học, tự tìm tòi khám phá của học sinh, rèn luyện được phương pháp học tập sáng tạo, thông minh của đông đảo học sinh.

Nội dung cuốn sách này gồm :

- ***Chương I : Vectơ***
- ***Chương II : Tích vô hướng của hai vectơ và ứng dụng***
- ***Chương III : Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng***

Bài tập cuối năm

Nội dung mỗi chương được chia ra nhiều chủ đề, mỗi chủ đề là một xoắn (§). Cấu trúc của mỗi xoắn được trình bày theo thứ tự sau đây :

A. Các kiến thức cần nhớ : *Phần này nêu tóm tắt lí thuyết của sách giáo khoa nhằm củng cố những kiến thức cơ bản, những kĩ năng cơ bản và các công thức cần nhớ.*

B. Dạng toán cơ bản : *Phần này hệ thống lại các dạng toán thường gặp trong khi làm bài tập, cung cấp cho học sinh các phương pháp giải, đồng thời cho các ví dụ minh hoạ về cách giải các bài toán thuộc các dạng vừa nêu ở phần trên và cho thêm các chú ý hoặc nhận xét cần thiết.*

C. Câu hỏi và bài tập : *Phần này nhằm mục đích củng cố và vận dụng các kiến thức và kĩ năng cơ bản đã học để trả lời các câu hỏi và làm bài tập thuộc các dạng đã nêu, giúp học sinh rèn luyện được phong cách tự học.*

Cuối mỗi chương có bài tập mang tính chất ôn tập và khoảng 30 câu hỏi trắc nghiệm.

Việc đưa thêm các câu hỏi trắc nghiệm nhằm giúp học sinh làm quen với một dạng bài tập mới, mà nhiều nước trên thế giới hiện nay đang dùng trong các sách giáo khoa của trường phổ thông. Cuối cuốn sách có phần hướng dẫn giải và đáp số.

Dù các tác giả đã cố gắng rất nhiều, nhưng vì thời gian biên soạn có hạn nên cuốn sách không sao tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong các độc giả vui lòng góp ý để cho những lần tái bản sau sách sẽ hoàn chỉnh hơn.

CÁC TÁC GIẢ

CHƯƠNG I

VECTƠ

§1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Để *xác định một vectơ* cần biết một trong hai điều kiện sau :

– Điểm đầu và điểm cuối của vectơ ;

– Độ dài và hướng.

2. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là *cùng phương* nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì chúng có thể *cùng hướng* hoặc *ngược hướng*.

3. *Độ dài* của một vectơ là *khoảng cách* giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

4. $\vec{a} = \vec{b}$ khi và chỉ khi $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ và $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

5. Với mỗi điểm A ta gọi $\overrightarrow{AA}$ là *vectơ - không*. Vectơ - không được kí hiệu là $\vec{0}$ và quy ước rằng $|\vec{0}| = 0$, vectơ $\vec{0}$ cùng phương và cùng hướng với mọi vectơ.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN



VẤN ĐỀ 1

Xác định một vectơ, sự cùng phương và hướng của hai vectơ

1. Phương pháp

- Để xác định vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ ta cần biết $|\vec{a}|$ và hướng của $\vec{a}$ hoặc biết điểm đầu và điểm cuối của $\vec{a}$. Chẳng hạn, với hai điểm phân biệt A và B ta có hai vectơ khác vectơ $\vec{0}$ là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$.
- Vectơ $\vec{a}$ là vectơ - không khi và chỉ khi $|\vec{a}| = 0$ hoặc $\vec{a} = \overrightarrow{AA}$ với A là điểm bất kì.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho 5 điểm phân biệt *A, B, C, D* và *E*. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ - không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đã cho ?

GIẢI

Với hai điểm phân biệt, chẳng hạn A và B, có hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$. Ta có 10 cặp điểm khác nhau, cụ thể là :

$$\{A,B\},\{A,C\},\{A,D\},\{A,E\},\{B,C\},\{B,D\},\{B,E\},\{C,D\},\{C,E\},\{D,E\}.$$

Do đó ta có 20 vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối là 5 điểm đã cho.

Cách khác : Một vectơ được xác định khi biết điểm đầu và điểm cuối của nó. Với 5 điểm phân biệt, ta có 5 cách chọn điểm đầu. Với mỗi cách chọn điểm đầu ta có 4 cách chọn điểm cuối. Vậy số vectơ khác $\vec{0}$ là : $5 \times 4 = 20$ (vectơ).

Ví dụ 2. Cho điểm *A* và vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$. Tìm điểm *M* sao cho :

a) $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\vec{a}$;

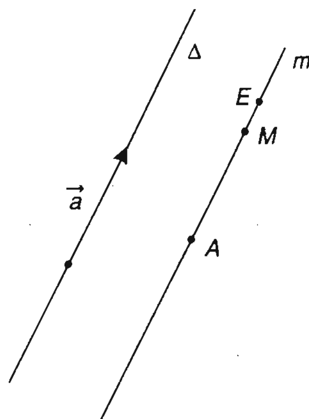
b) $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng với $\vec{a}$.

GIẢI

Gọi Δ là giá của $\vec{a}$ (h.1.1).

a) Nếu $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\vec{a}$ thì đường thẳng AM song song với Δ. Do đó M thuộc đường thẳng m đi qua A và song song với Δ.

Ngược lại, mọi điểm M thuộc đường thẳng m thì $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\vec{a}$.



Hình 1.1

Chú ý rằng nếu A thuộc đường thẳng Δ thì m trùng với Δ.

b) Lập luận tương tự như trên, ta thấy các điểm M thuộc một nửa đường thẳng gốc A của đường thẳng m. Cụ thể, đó là nửa đường thẳng có chứa điểm E sao cho $\overrightarrow{AE}$ và $\vec{a}$ cùng hướng.

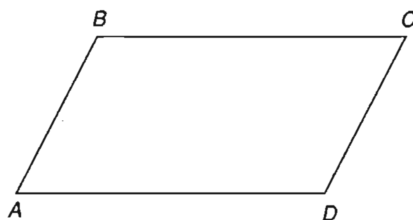


VẤN ĐỀ 2

Chứng minh hai vectơ bằng nhau

1. Phương pháp

Để chứng minh hai vectơ bằng nhau ta có thể dùng một trong ba cách sau :



Hình 1.2

- $\left.\begin{array}{l}|\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng hướng}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}.$

- Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ (h.1.2).

- Nếu $\vec{a} = \vec{b}$, $\vec{b} = \vec{c}$ thì $\vec{a} = \vec{c}$.

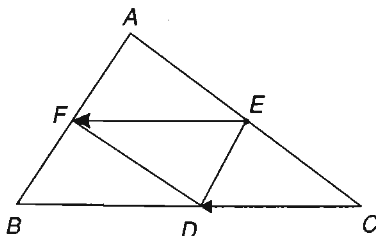
2. Các ví dụ



Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$.

GIẢI

(Xem h.1.3)



Hình 1.3

Cách 1. Vì EF là đường trung bình của tam giác ABC nên $EF = \frac{1}{2}BC$ và $EF // BC$. Do đó tứ giác $EFDC$ là hình bình hành, nên $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$.

Cách 2. Tứ giác $FECD$ là hình bình hành vì có các cặp cạnh đối song song. Suy ra $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$.

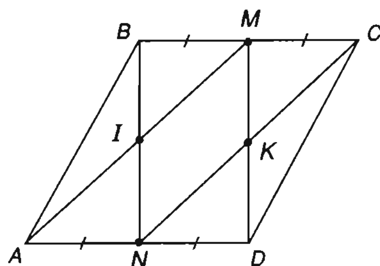


Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Điểm I là giao điểm của AM và BN, K là giao điểm của DM và CN. Chứng minh $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{NI}$.

GIẢI

Tứ giác $AMCN$ là hình bình hành vì $MC = AN$ và $MC // AN$. Suy ra $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$ (h.1.4).

Vì $MCDN$ là hình bình hành nên K là trung điểm của MD. Suy ra $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{KM}$. Tứ giác $IMKN$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{NI} = \overrightarrow{KM}$. Do đó $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{NI}$.



Hình 1.4



Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu hai vectơ bằng nhau có chung điểm đầu (hoặc điểm cuối) thì chúng có chung điểm cuối (hoặc điểm đầu).

GIẢI

Giả sử $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. Khi đó $AB = AC$, ba điểm A, B, C thẳng hàng và B, C thuộc một nửa đường thẳng gốc A. Do đó $B \equiv C$.

Nếu hai vectơ bằng nhau có chung điểm cuối thì chúng có chung điểm đầu được chứng minh tương tự.



Ví dụ 4. Cho điểm A và vectơ $\vec{a}$. Dựng điểm M sao cho :

a) $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$;

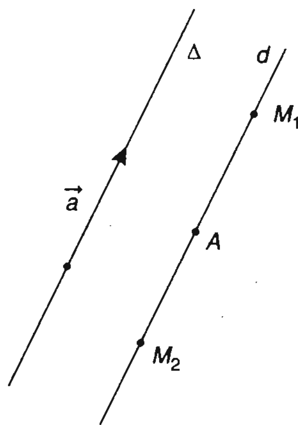
b) $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\vec{a}$ và có độ dài bằng $|\vec{a}|$.

GIẢI

Gọi Δ là giá của vectơ $\vec{a}$. Vẽ đường thẳng *d* đi qua *A* và *d* // Δ (nếu điểm *A* thuộc Δ thì *d* trùng với Δ). Khi đó có hai điểm M_1 và M_2 thuộc đường thẳng *d* sao cho $AM_1 = AM_2 = |\vec{a}|$ (h.1.5). Ta có :

a) $\overrightarrow{AM_1} = \vec{a}$;

b) $\overrightarrow{AM_1}$ và $\overrightarrow{AM_2}$ cùng phương với $\vec{a}$ và có độ dài bằng độ dài của $\vec{a}$.

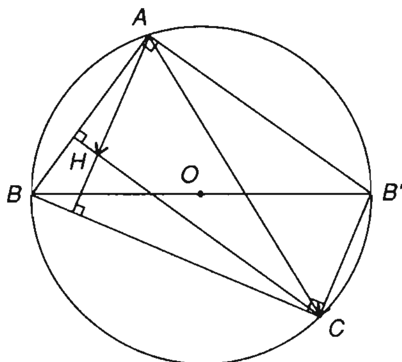


Hình 1.5


Ví dụ 5. Cho tam giác *ABC* có *H* là trực tâm và *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi *B'* là điểm đối xứng của *B* qua *O*. Chứng minh $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$.

GIẢI

Vì *BB'* là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* nên $\widehat{BAB'} = \widehat{BCB'} = 90^{\circ}$. Do đó *CH* // *B'A* và *AH* // *B'C*. Suy ra tứ giác *AB'CH* là hình bình hành. Vậy $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$ (h.1.6).



Hình 1.6

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.1. Hãy tính số các vectơ (khác $\vec{0}$) mà các điểm đầu và điểm cuối được lấy từ các điểm phân biệt đã cho trong các trường hợp sau :

a) Hai điểm ;

b) Ba điểm ;

c) Bốn điểm.

1.2. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Liệt kê tất cả các vectơ bằng nhau (khác $\vec{0}$) nhận đỉnh hoặc tâm của hình vuông làm điểm đầu và điểm cuối.

1.3. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P và Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD và DA. Chứng minh $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}$ và $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{NM}$.

1.4. Cho tam giác ABC. Các điểm M và N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AC. So sánh độ dài của hai vectơ $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{BC}$. Vì sao có thể nói hai vectơ này cùng phương ?

1.5. Cho tứ giác $ABCD$, chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ thì $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

1.6. Xác định vị trí tương đối của ba điểm phân biệt A, B và C trong các trường hợp sau :

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng, $|\overrightarrow{AB}| > |\overrightarrow{AC}|$;

b) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng ;

c) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

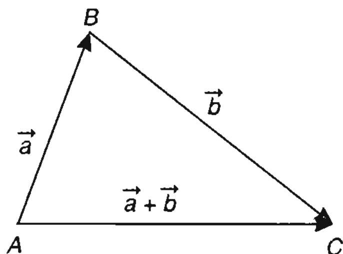
1.7. Cho hình bình hành $ABCD$. Dựng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC}$. Chứng minh $\overrightarrow{AQ} = \vec{0}$.

§2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

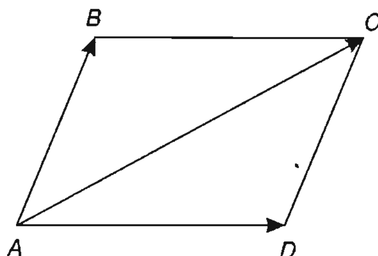
A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa tổng của hai vectơ và quy tắc tìm tổng

- Cho hai vectơ tuỳ ý $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy điểm A tuỳ ý, dựng $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$ (h.1.7).
- Với ba điểm M, N và P tuỳ ý ta luôn có :
  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$. (quy tắc ba điểm)
- Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, ta có (h.1.8) :
  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành).



Hình 1.7



Hình 1.8

2. Định nghĩa vectơ đối

- Vectơ $\vec{b}$ là *vectơ đối* của vectơ $\vec{a}$ nếu $|\vec{b}| = |\vec{a}|$ và $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ ngược hướng. Kí hiệu $\vec{b} = -\vec{a}$.
- Nếu $\vec{a}$ là vectơ đối của $\vec{b}$ thì $\vec{b}$ là vectơ đối của $\vec{a}$ hay $-(-\vec{a}) = \vec{a}$.
- Mỗi vectơ đều có vectơ đối. Vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$. Vectơ đối của $\vec{0}$ là $\vec{0}$.

3. Định nghĩa hiệu của hai vectơ và quy tắc tìm hiệu

- $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$;
- Ta có : $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$ với ba điểm O, A, B bất kì (quy tắc trừ).

4. *Tính chất của phép cộng các vectơ*

Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì ta có

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (tính chất giao hoán) ;
- $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (tính chất kết hợp) ;
- $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ (tính chất của vectơ - không) ;
- $\vec{a}+(-\vec{a})=-\vec{a}+\vec{a}=\vec{0}$.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN



VẤN ĐỀ 1

Tìm tổng của hai vectơ và tổng của nhiều vectơ

1. *Phương pháp*

Dùng định nghĩa tổng của hai vectơ, quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và các tính chất của tổng các vectơ.

2. *Các ví dụ*



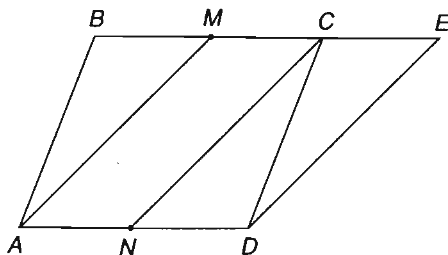
Ví dụ 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD.

a) Tìm tổng của hai vectơ $\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{NC}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

GIẢI

(Xem h.1.9)



Hình 1.9

a) Vì $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AN}$, ta có

$$\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{AN}$$
$$= \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AC}.$$

Vì $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$, ta có $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$.

Vì $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AM}$, ta có $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE}$, với E là đỉnh của hình bình hành $AMED$.

b) Vì tứ giác $AMCN$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$.

Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Vậy $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.



Ví dụ 2. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O.
Chứng minh $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.

GIẢI

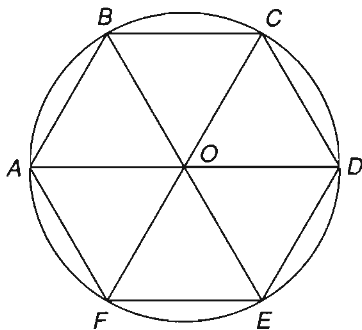
Tâm O của lục giác đều là tâm đối xứng của lục giác (h.1.10).

Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$,

$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.

Do đó :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} =$$
$$= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF}) = \vec{0}.$$



Hình 1.10



Ví dụ 3. Cho $\vec{a}, \vec{b}$ là các vectơ khác $\vec{0}$ và $\vec{a} \neq \vec{b}$. Chứng minh các khẳng định sau :

a) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì $\vec{a} + \vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$;

b) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng thì $\vec{a} + \vec{b}$ cùng hướng với $\vec{a}$.

GIẢI

Giả sử $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

a) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì ba điểm A, B, C cùng thuộc một đường thẳng. Hai vectơ $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$ và $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ có cùng giá, vậy chúng cùng phương.

b) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng, thì ba điểm A, B, C cùng thuộc một đường thẳng và B, C nằm về một phía của A. Vậy $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$ và $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ cùng hướng.



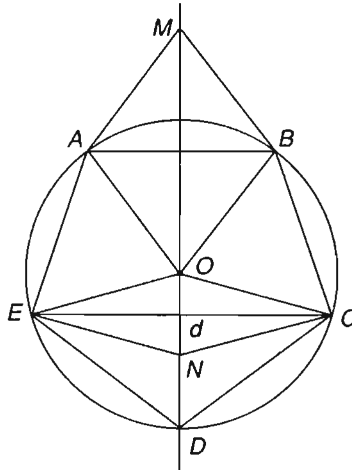
Ví dụ 4. Cho ngũ giác đều *ABCDE* tâm *O*.

a) Chứng minh rằng hai vectơ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}$ đều cùng phương với $\overrightarrow{OD}$.

b) Chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EC}$ cùng phương.

GIẢI

(Xem h.1.11)



Hình 1.11

a) Gọi d là đường thẳng chứa OD thì d là một trục đối xứng của ngũ giác đều. Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}$, trong đó M là đỉnh của hình thoi $OAMB$ và thuộc d. Cũng như vậy, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{ON}$, trong đó N thuộc d. Vậy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}$ đều cùng phương với $\overrightarrow{OD}$ vì cùng có chung giá d.

b) AB và EC cùng vuông góc với d nên $AB \parallel EC$, suy ra $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{EC}$.



VẤN ĐỀ 2

Tìm vectơ đối và hiệu của hai vectơ

1. Phương pháp

- Theo định nghĩa, để tìm hiệu $\vec{a}-\vec{b}$, ta làm hai bước sau :

– Tìm vectơ đối của $\vec{b}$;

– Tính tổng $\vec{a}+(-\vec{b})$.

- Vận dụng quy tắc $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$ với ba điểm O, A, B bất kì.

2. Các ví dụ



Ví dụ 1. Chứng minh $-(\vec{a}+\vec{b})=-\vec{a}+(-\vec{b})$.

GIẢI

Giả sử $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ thì $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Ta có $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$, $-\vec{b}=\overrightarrow{CB}$.

Do đó $-\vec{a}+(-\vec{b})=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}=-(\vec{a}+\vec{b})$.



Ví dụ 2.

a) Chứng minh rằng nếu $\vec{a}$ là vectơ đối của $\vec{b}$ thì $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$.

GIẢI

a) Giả sử $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$ thì $\vec{a}=\overrightarrow{BA}$. Do đó $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$.

b) Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $IA = IB$ và hai vectơ $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB}$ ngược hướng. Vậy $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$.

Ngược lại, nếu $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$ thì $IA = IB$ và hai vectơ $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB}$ ngược hướng. Do đó A, I, B thẳng hàng. Vậy I là trung điểm của đoạn thẳng AB.



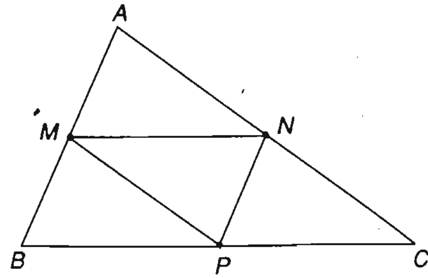
Ví dụ 3. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N và P lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC.

a) Tìm hiệu $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{CP}$.

b) Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

GIẢI

(Xem h.1.12)



Hình 1.12

a) $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NM}$;

$\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PN}$

(vì $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MP}$) ;

$\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$

(vì $-\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NP}$) ;

$\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BC}$ (vì $-\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{PC}$).

b) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN}$.



Vấn đề 3

Tính độ dài của $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$

1. Phương pháp

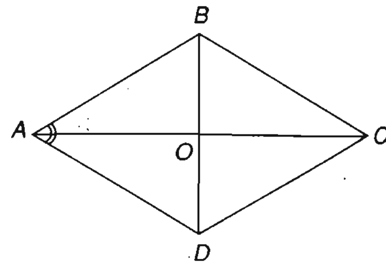
Đầu tiên tính $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{CD}$. Sau đó tính độ dài các đoạn thẳng *AB* và *CD* bằng cách gắn nó vào các đa giác mà ta có thể tính được độ dài các cạnh của nó hoặc bằng các phương pháp tính trực tiếp khác.

2. Các ví dụ



Ví dụ 1. Cho hình thoi *ABCD* có $\widehat{BAD} = 60^{\circ}$ và cạnh là *a*. Gọi *O* là giao điểm hai đường chéo. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$, $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}|$, $|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC}|$.

GIẢI



Hình 1.13

Vì tứ giác *ABCD* là hình thoi cạnh *a* và $\widehat{BAD} = 60^{\circ}$ nên $AC = a\sqrt{3}$, $BD = a$ (h.1.13).

Ta có : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ nên

$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = AC = a\sqrt{3}$;

$$\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA} \text{ nên } \left|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right|=CA=a\sqrt{3} \text{ ;}$$

$$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DO}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CO} \text{ (vì } \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}\text{).}$$

Do đó $\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{DC}\right|=CO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Ví dụ 2. Chứng minh các khẳng định sau :

a) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng thì $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

b) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{b}|\geq|\vec{a}|$ thì $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{b}|-|\vec{a}|$.

c) $|\vec{a}+\vec{b}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|$. Khi nào xảy ra dấu đẳng thức ?

GIẢI

Giả sử $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ thì $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

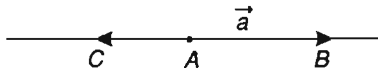
a) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng thì ba điểm A, B, C cùng thuộc một đường thẳng và B nằm giữa A và C. Do đó $AB + BC = AC$ (h.1.14).



Hình 1.14

Vậy $|\vec{a}+\vec{b}|=AC=AB+BC=|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

b) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{b}|\geq|\vec{a}|$ thì ba điểm A, B, C cùng thuộc một đường thẳng và A nằm giữa B và C. Do đó $AC = BC - AB$ (h.1.15).



Hình 1.15

Vậy $|\vec{a}+\vec{b}|=AC=BC-AB=|\vec{b}|-|\vec{a}|$.

c) Từ các chứng minh trên suy ra rằng nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ hoặc $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

Xét trường hợp $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó A, B, C không thẳng hàng. Trong tam giác ABC ta có hệ thức $AC < AB + BC$. Do đó $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

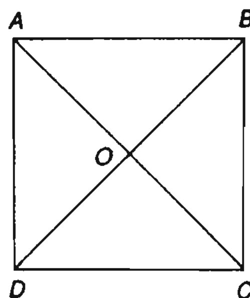
Vậy trong mọi trường hợp ta đều có

$$|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

Ví dụ 3. Cho hình vuông *ABCD* cạnh *a* có O là giao điểm của hai đường chéo. Hãy tính $|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}|$, $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}|$, $|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}|$.

GIẢI



Hình 1.16

Ta có $AC = BD = a\sqrt{2}$,

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BO}$ (h.1.16).

Do đó $|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}| = BO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{DC}| = 2a$

(vì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng),

$\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BD}$ (vì $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$).

Do đó $|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}| = BD = a\sqrt{2}$.



VẤN ĐỀ 4

Chứng minh đẳng thức vectơ

1. Phương pháp

Mỗi vế của một đẳng thức vectơ gồm các vectơ được nối với nhau bởi các phép toán vectơ. Ta dùng quy tắc tìm tổng, hiệu của hai vectơ, tìm vectơ đối để biến đổi vế này thành vế kia của đẳng thức hoặc biến đổi cả hai vế của đẳng thức để được hai vế bằng nhau. Ta cũng có thể biến đổi đẳng thức vectơ cần chứng minh đó tương đương với một đẳng thức vectơ được công nhận là đúng.

2. *Các ví dụ*



Ví dụ 1. Chứng minh các khẳng định sau :

a) $\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{c}$;

b) $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{b}-\vec{c}$.

GIẢI

a) Nếu $\vec{a}=\vec{b}=\overrightarrow{AB}$ và $\vec{c}=\overrightarrow{BC}$ thì $\vec{a}+\vec{c}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{AC}$. Vậy $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{c}$.

Ngược lại, nếu $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{c}$ ta cần chứng minh $\vec{a}=\vec{b}$. Giả sử $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{A_1B}$, $\vec{c}=\overrightarrow{BC}$.

Từ $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{c}$ suy ra $\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AC}$. Vậy $A_1 \equiv A$ hay $\vec{a}=\vec{b}$.

b) $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}+\vec{c}+(-\vec{c})=\vec{b}+(-\vec{c}) \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{b}-\vec{c}$.



Ví dụ 2. Cho sáu điểm A, B, C, D, E và F. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}. \qquad (1)$$

GIẢI

Cách 1. Ta có : (1) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BE}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{EF}$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EF}$. Vậy đẳng thức (1) được chứng minh.

Cách 2. Biến đổi vế trái :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}\\ &= \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DF}\\ &= \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}\end{aligned}$$

(vì $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{FF}=\vec{0}$).

Cách 3. Biến đổi vế phải :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FD}\\ &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD}\\ &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}\end{aligned}$$

(vì $\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD}=\vec{0}$).

• Sau đây là bài toán tương tự :

Cho bốn điểm A, B, C và D. Hãy chứng minh $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ theo ba cách như ví dụ trên.


Ví dụ 3. Cho năm điểm *A, B, C, D* và *E*. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}.$$

GIẢI

Ta có $-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CD},\ -\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EC}$ nên :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}\\ &=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE})+\overrightarrow{EC}\\ &=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$


Ví dụ 4. Cho tam giác *ABC*. Các điểm *M, N* và *P* lần lượt là trung điểm các cạnh *AB, AC* và *BC*. Chứng minh rằng với điểm *O* bất kì ta có

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}.$$

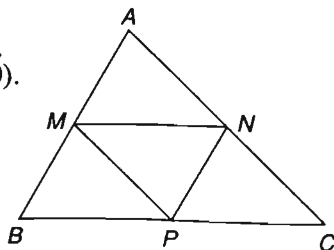
GIẢI

Biến đổi vế trái (h.1.17) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NC}\\ &= \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{NC}\\ &= \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{AN}\\ &= \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\end{aligned}$$

(vì $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{NM},\ \overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AN}$

và $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NN}=\vec{0}$).



Hình 1.17

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.8. Cho năm điểm A, B, C, D và E. Hãy tính tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$.

1.9. Cho bốn điểm A, B, C và D. Chứng minh $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$.

1.10. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ sao cho $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$.

a) Dựng $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Chứng minh O là trung điểm của AB.

b) Dựng $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$. Chứng minh $O \equiv B$.

1.11. Gọi O là tâm của tam giác đều ABC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

1.12. Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

1.13. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Trên cạnh AC lấy hai điểm E và F sao cho $AE = EF = FC$; BE cắt AM tại N. Chứng minh $\overrightarrow{NA}$ và $\overrightarrow{NM}$ là hai vectơ đối nhau.

1.14. Cho hai điểm phân biệt A và B. Tìm điểm M thoả mãn một trong các điều kiện sau :

a) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$; b) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$; c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

1.15. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu $|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}|$ thì tam giác ABC là tam giác vuông tại C.

1.16. Cho ngũ giác $ABCDE$. Chứng minh $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DE}$.

1.17. Cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Với điều kiện nào thì vectơ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ nằm trên đường phân giác của góc $\widehat{AOB}$?

1.18. Cho hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ có điểm đặt O và tạo với nhau góc 60°. Tìm cường độ tổng hợp lực của hai lực ấy biết rằng cường độ của hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ đều là 100 N.

1.19. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là một điểm bất kì trên đường chéo AC. Qua O kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của hình bình hành. Các đường thẳng này cắt AB và DC lần lượt tại M và N, cắt AD và BC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$; b) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{FN}$.

§3. TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa *tích của vectơ với một số*. Cho số k và vectơ $\vec{a}$, dựng được vectơ $k\vec{a}$.

2. Các tính chất của phép nhân vectơ với một số : Với hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ tuỳ ý và với mọi số $k, h \in \mathbb{R}$ ta có :

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$;
- $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$;
- $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$;
- $1.\vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$; $0.\vec{a} = \vec{0}$; $k.\vec{0} = \vec{0}$.

3. Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ với $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương khi và chỉ khi có số k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, $\vec{b} \neq \vec{0}$. Ta luôn tìm được số k để $\vec{a} = k\vec{b}$ và khi đó số k tìm được là duy nhất.

4. Áp dụng :

- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, với số k xác định.
- I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$, $\forall M$.
- G là trọng tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$, $\forall M$.

5. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương và $\vec{x}$ là một vectơ tùy ý. Bao giờ cũng tìm được cặp số h và k duy nhất sao cho $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN



VẤN ĐỀ 1

Xác định vectơ $k\vec{a}$

1. Phương pháp

Dựa vào định nghĩa vectơ $k\vec{a}$.

- $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$

Nếu $k > 0$, $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng ;

Nếu $k < 0$, $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ ngược hướng.

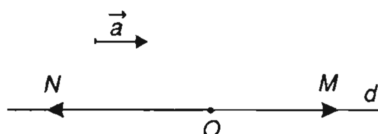
- $k.\vec{0} = \vec{0}$, $0.\vec{a} = \vec{0}$.
- $1.\vec{a} = \vec{a}$, $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

2. Các ví dụ

 **Ví dụ 1.** Cho $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ và điểm O. Xác định hai điểm M và N sao cho $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}$, $\overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$.

GIẢI

Vẽ đường thẳng d đi qua O và song song với giá của $\vec{a}$. (Nếu O thuộc giá của $\vec{a}$ thì d là giá của $\vec{a}$) (h.1.18).



Hình 1.18

Trên d lấy điểm M sao cho $OM = 3|\vec{a}|$, $\overrightarrow{OM}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi đó $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}$. Lấy điểm N trên d sao cho $ON = 4|\vec{a}|$, $\overrightarrow{ON}$ và $\vec{a}$ ngược hướng, khi đó $\overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$.

 **Ví dụ 2.** Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm trên đoạn AB sao cho $AM = \frac{1}{5}AB$. Tìm số k trong các đẳng thức sau :

a) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$; c) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB}$.

GIẢI

(Xem h.1.19)



Hình 1.19

a) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Rightarrow |k| = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{5}$. Vì $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng nên $k = \dfrac{1}{5}$.

b) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Rightarrow |k| = \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{1}{4}$. Vì $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng nên $k = -\dfrac{1}{4}$.

c) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB} \Rightarrow |k| = \dfrac{MA}{AB} = \dfrac{1}{5}$. Vì $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng nên $k = -\dfrac{1}{5}$.



Ví dụ 3. a) Chứng minh vectơ đối của vectơ $5\vec{a}$ là $(-5)\vec{a}$.

b) Tìm vectơ đối của các vectơ $2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{a} - 2\vec{b}$.

GIẢI

a) $-(5\vec{a}) = (-1).(5\vec{a}) = ((-1)5).\vec{a} = (-5).\vec{a}$

b) $-(2\vec{a} + 3\vec{b}) = (-1).(2\vec{a} + 3\vec{b}) = (-1).(2\vec{a}) + (-1).(3\vec{b})$

$= (-2).\vec{a} + (-3).\vec{b} = -2\vec{a} - 3\vec{b}$.

$-(\vec{a} - 2\vec{b}) = (-1).(\vec{a} - 2\vec{b}) = (-1).\vec{a} + 2.\vec{b} = -\vec{a} + 2\vec{b}$.



VẤN ĐỀ 2

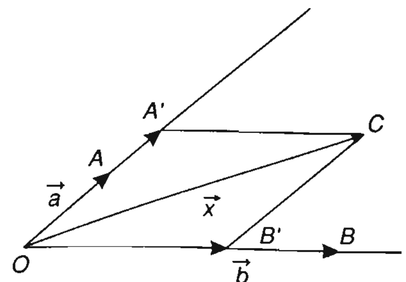
Phân tích (biểu thị) một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

1. Phương pháp

a) Để phân tích vectơ $\vec{x} = \overrightarrow{OC}$ theo hai vectơ không cùng phương $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ta làm như sau :

• Vẽ hình bình hành $OA'CB'$ có hai đỉnh O, C và hai cạnh OA' và OB' lần lượt nằm trên hai giá của $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ (h.1.20).

Ta có $\vec{x} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$.



Hình 1.20

• Xác định số h để $\overrightarrow{OA'} = h\overrightarrow{OA}$.

Xác định số k để $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$.

Khi đó $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$.

b) Có thể sử dụng linh hoạt các công thức sau :

• $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, với ba điểm O, A, B bất kì ;

• $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

2. Các ví dụ



Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Cho các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF. Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AF}$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DC}$ theo hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$.

GIẢI

Vì tứ giác $AEDF$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \vec{u} + \vec{v}$ và $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ (h.1.21).

Vậy $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

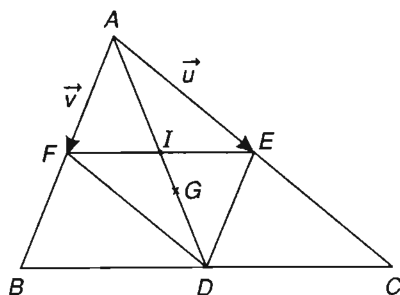
$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{AF}$,

vậy $\overrightarrow{DE} = (-1).\vec{v} + 0.\vec{u}$.

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF}$,

vậy $\overrightarrow{DC} = \vec{u} - \vec{v}$.

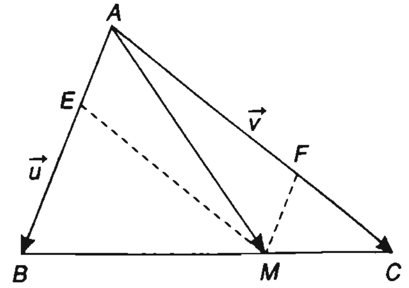


Hình 1.21



Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Điểm M trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

GIẢI



Hình 1.22

Ta có

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$

Vậy $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$ (h.1.22).

• Ta có thể giải bài toán bằng cách dùng định lí Ta-lét như sau :

Kẻ $ME \parallel AC$ và $MF \parallel AB$, ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$. Theo định lí Ta-lét $AE = \frac{1}{3}AB$, $AF = \frac{2}{3}AC$. Do đó $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\vec{u}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\vec{v}$.

Vậy $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$.



VẤN ĐỀ 3

Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song

1. Phương pháp

Dựa vào các khẳng định sau :

• Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

• Nếu $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ và hai đường thẳng AB và CD phân biệt thì $AB \parallel CD$.

2. Các ví dụ

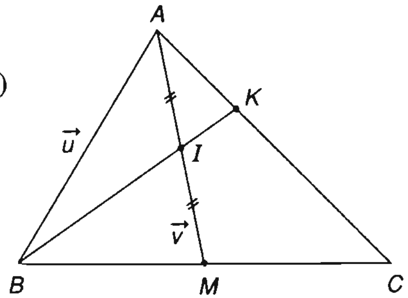


Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của AM và K là điểm trên cạnh AC sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$. Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng.

GIẢI

Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ (h.1.23).

Ta phân tích $\overrightarrow{BK}$ và $\overrightarrow{BI}$ theo $\vec{u}, \vec{v}$.



Hình 1.23

$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \vec{u} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})$$

$$= \vec{u} + \frac{1}{3}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM})$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2\vec{u} + \vec{v} = 3\overrightarrow{BK}$, $2\vec{u} + \vec{v} = 4\overrightarrow{BI}$.

Vậy $3\overrightarrow{BK} = 4\overrightarrow{BI}$ hay $\overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$. Do đó ba điểm B, I, K thẳng hàng.



Ví dụ 2. Cho tam giác *ABC*. Hai điểm *M, N* được xác định bởi các hệ thức : $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Chứng minh *MN // AC*.

GIẢI

Ta có $\quad \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$,

hay $\quad (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}) - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AC}.$$

Vậy $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$.

Theo giả thiết ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM}$, mà A, B, C không thẳng hàng nên bốn điểm A, B, C, M là một hình bình hành.

Từ đó suy ra M không thuộc đường thẳng AC và $MN \parallel AC$.



VẤN ĐỀ 4

Chứng minh các đẳng thức vectơ có chứa tích của vectơ với một số

1. Phương pháp

- Sử dụng tính chất tích của vectơ với một số.
- Sử dụng các tính chất của : ba điểm thẳng hàng, trung điểm của một đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác.

2. Các ví dụ



Ví dụ 1. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng AB và CD. Chứng minh rằng $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

GIẢI

Vì N là trung điểm của đoạn thẳng CD nên $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$.

Mặt khác $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}$ nên

$$\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})$$

$$= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD} \quad \text{(vì } M \text{ là trung điểm của } AB\text{)}.$$

Vậy $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.



Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AC}.$$

GIẢI

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. Do đó

$$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AC}.$$



Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và $A'B'C'$ thì $3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$.

GIẢI

Vì G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ nên

$$3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}. \qquad (1)$$

Hơn nữa $\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'}$

$\overrightarrow{GB'} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB'}$

$\overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC'}$.

Cộng từng vế ba đẳng thức trên và vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ nên

$$\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$.

• Có thể chứng minh như sau

Ta có $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G'}$

$\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'G'}$

$\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'G'}$.

Cộng từng vế của ba đẳng thức trên và sử dụng điều kiện của trọng tâm tam giác ta suy ra điều cần chứng minh.



VẤN ĐỀ 5

Xác định vị trí của một điểm nhờ đẳng thức vectơ

1. Phương pháp

Sử dụng các khẳng định và các công thức sau :

- $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A \equiv B$;
- Cho điểm A và cho $\vec{a}$. Có duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$;
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow B \equiv C$, $\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow A_1 \equiv A$.

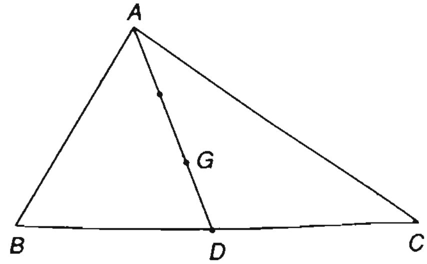
2. Các ví dụ



Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có D là trung điểm của BC. Xác định vị trí của điểm G biết $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GD}$.

GIẢI

Từ $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GD}$, suy ra ba điểm A, G, D thẳng hàng, $AG = 2GD$ và điểm G ở giữa A và D. Vậy G là trọng tâm của tam giác ABC (h.1.24).



Hình 1.24



Ví dụ 2. Cho hai điểm A và B. Tìm điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

GIẢI

$$\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IB}.$$

Từ đó suy ra $|\overrightarrow{IA}| = |-2\overrightarrow{IB}|$ hay $IA = 2IB$, $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ ngược hướng (h.1.25).



Hình 1.25

Vậy I là điểm thuộc đoạn AB mà $IB = \frac{1}{3}AB$.



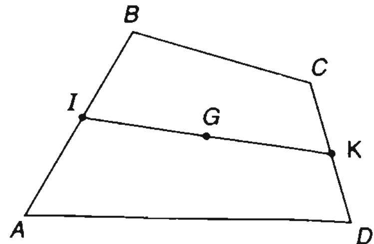
Ví dụ 3. Cho tứ giác $ABCD$. Xác định vị trí điểm G sao cho

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

GIẢI

Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GI}$, trong đó I là trung điểm của AB và $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GK}$, trong đó K là trung điểm của CD. Vậy theo giả thiết ta có $2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GK} = \vec{0}$ hay $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GK} = \vec{0}$ (h.1.26).

Do đó G là trung điểm của đoạn thẳng IK.



Hình 1.26

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.20. Tìm giá trị của m sao cho $\vec{a} = m\vec{b}$ trong các trường hợp sau :

a) $\vec{a} = \vec{b} \neq \vec{0}$;

b) $\vec{a} = -\vec{b}$ và $\vec{a} \neq \vec{0}$;

c) $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng và $|\vec{a}| = 20$, $|\vec{b}| = 5$;

d) $\vec{a}$, $\vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 15$;

e) $\vec{a} = \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$;

g) $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} = \vec{0}$;

h) $\vec{a} = \vec{0}, \vec{b} = \vec{0}$.

1.21. Chứng minh rằng :

a) Nếu $\vec{a} = \vec{b}$ thì $m\vec{a} = m\vec{b}$;

b) $m\vec{a} = m\vec{b}$ và $m \neq 0$ thì $\vec{a} = \vec{b}$;

c) Nếu $m\vec{a} = n\vec{a}$ và $\vec{a} \neq \vec{0}$ thì $m = n$.

1.22. Chứng minh rằng tổng của n vectơ $\vec{a}$ bằng $n\vec{a}$ (n là số nguyên dương).

1.23. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ thì G là trọng tâm của tam giác ABC.

1.24. Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ thì hai tam giác đó có cùng trọng tâm.

1.25. Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Dựng các vectơ :

a) $2\vec{a} + \vec{b}$; b) $\vec{a} - 2\vec{b}$; c) $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

1.26. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O có cạnh a.

a) Phân tích vectơ $\overrightarrow{AD}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AF}$.

b) Tính độ dài của vectơ $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ theo a.

1.27. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM (M là trung điểm của BC). Phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

1.28. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NA = 2NC$. Gọi K là trung điểm của MN.

Phân tích vectơ $\overrightarrow{AK}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

1.29. Cho tam giác ABC. Dựng $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CA}$.

a) Chứng minh rằng A là trung điểm của $B'C'$.

b) Chứng minh các đường thẳng AA', BB' và CC' đồng quy.

1.30. Cho tam giác ABC. Điểm I trên cạnh AC sao cho $CI = \frac{1}{4}CA$, J là điểm mà

$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

a) Chứng minh $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

b) Chứng minh B, I, J thẳng hàng.

c) Hãy dựng điểm J thoả điều kiện đề bài.

1.31. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng với điểm M bất kì ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

1.32. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$.

1.33. Cho tứ giác $ABCD$. Các điểm M, N, P và Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD và DA. Chứng minh rằng hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.

1.34. Cho tam giác ABC.

a) Tìm điểm K sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CB}$.

b) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

1.35. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, H là trực tâm của tam giác, D là điểm đối xứng của A qua O.

a) Chứng minh tứ giác $HCDB$ là hình bình hành.

b) Chứng minh : $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}$;

$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$;

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

Chứng minh $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Từ đó có kết luận gì về ba điểm O, H, G ?

§4. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa toạ độ của một điểm, độ dài đại số của một vectơ trên một trục.

2. Định nghĩa toạ độ của một vectơ, của một điểm trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

- $\vec{a} = (a_1 ; a_2) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$.
- Nếu $\vec{a} = (a_1 ; a_2)$, $\vec{b} = (b_1 ; b_2)$ thì $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2. \end{cases}$
- M có toạ độ là $(x ; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x ; y)$ với O là gốc toạ độ ;

  $x = \overline{OM_1}$, $y = \overline{OM_2}$, trong đó M_1 và M_2 lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống Ox và Oy.
- Nếu A có toạ độ là $(x_A ; y_A)$, B có toạ độ là $(x_B ; y_B)$ thì

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A ; y_B - y_A).$$

3. Toạ độ của $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $k\vec{a}$.

Cho $\vec{a} = (a_1 ; a_2)$, $\vec{b} = (b_1 ; b_2)$, $k \in \mathbb{R}$.

Ta có
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1 ; a_2 + b_2) ;$$
$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1 ; a_2 - b_2) ;$$
$$k\vec{a} = (ka_1 ; ka_2).$$

Từ đó suy ra rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ cùng phương khi và chỉ khi có số k thoả mãn $\begin{cases} b_1 = ka_1 \\ b_2 = ka_2. \end{cases}$

4. Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \; ; \; y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì :

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \; ; \; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN



Vấn đề 1

Tìm toạ độ của một điểm và độ dài đại số của một vectơ trên trục $(O; \vec{e})$

1. Phương pháp

Căn cứ vào định nghĩa toạ độ của điểm và độ dài đại số của vectơ.

- Điểm M có toạ độ $a \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = a\vec{e}$ với O là điểm gốc.
- Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có độ dài đại số là $m = \overline{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = m\vec{e}$.
- Nếu M và N có toạ độ lần lượt là a và b thì $\overline{MN} = b - a$.

2. Các ví dụ



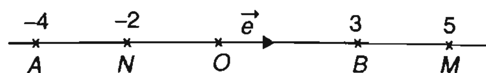
Ví dụ 1. Trên trục $(O ; \vec{e})$ cho các điểm A, B, M, N lần lượt có toạ độ là $-4 ; 3 ; 5 ; -2$.

a) Biểu diễn các điểm đã cho trên trục ;

b) Tính độ dài đại số của các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MN}$.

GIẢI

a) Biểu diễn các điểm A, B, M, N như sau :



Hình 1.27

b) $\overline{AB} = 3 - (-4) = 7$

$\overline{AM} = 5 - (-4) = 9$

$\overline{MN} = -2 - 5 = -7.$



Ví dụ 2. Cho ba điểm tuỳ ý A, B, C trên trục $(O\,;\,\vec{e})$. Chứng minh rằng :

a) $\overline{AB} = AB$ nếu $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{e}$;

$\overline{AB} = -AB$ nếu $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với $\vec{e}$.

b) $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

GIẢI

a) $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}.\vec{e}$. Từ đó suy ra :

$|\overrightarrow{AB}| = |\overline{AB}|.|\vec{e}|$ hay $|\overline{AB}| = AB$.

Nếu $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{e}$ thì $\overline{AB} > 0$, nên ta có $\overline{AB} = AB$. Nếu $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với $\vec{e}$ thì $\overline{AB} < 0$, nên ta có $\overline{AB} = -AB$.

b) Với ba điểm A, B, C ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Vì $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}.\vec{e}$, $\overrightarrow{BC} = \overline{BC}.\vec{e}$, $\overrightarrow{AC} = \overline{AC}.\vec{e}$ nên ta có :

$\overline{AB}.\vec{e} + \overline{BC}.\vec{e} = \overline{AC}.\vec{e}$ hay $(\overline{AB} + \overline{BC}).\vec{e} = \overline{AC}.\vec{e}$.

Suy ra $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.



Chú ý : Hệ thức $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ gọi là hệ thức Sa-lơ.



VẤN ĐỀ 2

Xác định toạ độ của vectơ và của một điểm trên mặt phẳng toạ độ Oxy

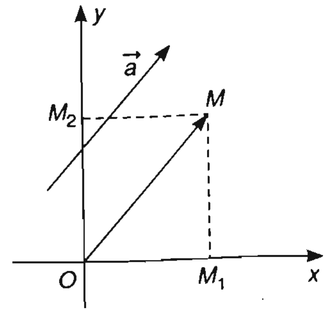
1. Phương pháp

Căn cứ vào định nghĩa toạ độ của một vectơ và toạ độ của một điểm trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

• Để tìm toạ độ của vectơ $\vec{a}$ ta làm như sau :

Vẽ vectơ $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.

Gọi hai điểm M_1 và M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên Ox và Oy. Khi đó $\vec{a} = (a_1 ; a_2)$ trong đó $a_1 = \overline{OM_1}$, $a_2 = \overline{OM_2}$ (h.1.28).



Hình 1.28

• Để tìm toạ độ của điểm A ta tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OA}$. Như vậy A có toạ độ là $(x ; y)$ trong đó $x = \overline{OA_1}$, $y = \overline{OA_2}$; A_1 và A_2 tương ứng là chân đường vuông góc hạ từ A xuống Ox và Oy.

• Nếu biết toạ độ của hai điểm A, B ta tính được toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ theo công thức :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A \ ; \ y_B - y_A).$$

2. *Các ví dụ*



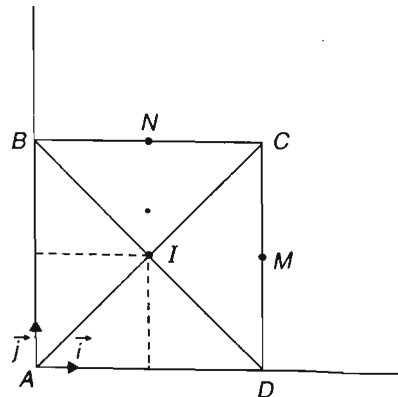
Ví dụ 1. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh $a = 5$. Chọn hệ trục toạ độ $(A ; \vec{i}, \vec{j})$, trong đó $\vec{i}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng, $\vec{j}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng. Tìm toạ độ các đỉnh của hình vuông, giao điểm I của hai đường chéo, trung điểm N của BC và trung điểm M của CD.

GIẢI

Ta có $A(0 ; 0)$, $B(0 ; 5)$, $C(5 ; 5)$,

$D(5 ; 0)$, $I\left(\frac{5}{2} ; \frac{5}{2}\right)$, $N\left(\frac{5}{2} ; 5\right)$,

$M\left(5 ; \frac{5}{2}\right)$ (h.1.29).



Hình 1.29

 **Ví dụ 2.** Cho hình bình hành *ABCD* có *AD* = 4 và chiều cao ứng với cạnh AD bằng 3, góc $\widehat{BAD} = 60^o$. Chọn hệ trục toạ độ $(A\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$ sao cho $\vec{i}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng. Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC}$.

GIẢI

Kẻ $BH \perp AD$, ta có $BH = 3$, $AB = 2\sqrt{3}$, $AH = \sqrt{3}$ (h.1.30).

Do đó ta có các toạ độ : $A(0\ ;\ 0)$,

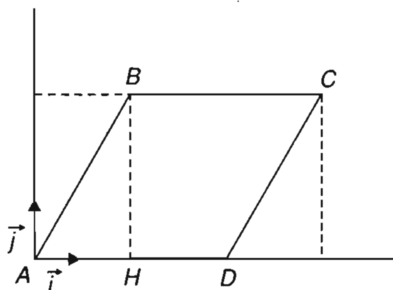
$B(\sqrt{3}\ ;\ 3)$, $C(4 + \sqrt{3}\ ;\ 3)$, $D(4\ ;\ 0)$.

Từ đó có $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{3}\ ;\ 3)$

$\overrightarrow{BC} = (4\ ;\ 0)$

$\overrightarrow{CD} = (-\sqrt{3}\ ;\ -3)$

$\overrightarrow{AC} = (4 + \sqrt{3}\ ;\ 3)$.



Hình 1.30

 **Ví dụ 3.** Cho tam giác *ABC*. Các điểm *M*(1 ; 0), *N*(2 ; 2) và *P*(–1 ; 3) lần lượt là trung điểm các cạnh *BC*, *CA* và *AB*. Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác.

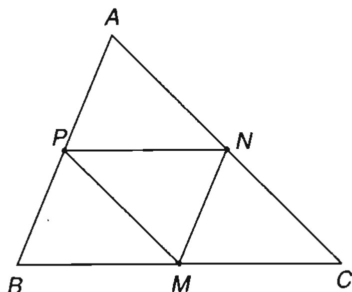
GIẢI

Ta có : *NAPM* là hình bình hành suy ra $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MP}$ (h.1.31).

$\overrightarrow{NA} = \left(x_A - 2\ ;\ y_A - 2\right)$

$\overrightarrow{MP} = (-2\ ;\ 3)$.

Suy ra $\begin{cases} x_A - 2 = -2 \\ y_A - 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 5. \end{cases}$



Hình 1.31

Vậy toạ độ của *A* là (0 ; 5).

Tương tự, từ $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NP}$ ta tính được *B*(–2 ; 1), *C*(4 ; –1).

 **Ví dụ 4.** Cho hình bình hành *ABCD* có *A*(–1 ; 3), *B*(2 ; 4), *C*(0 ; 1). Tìm toạ độ đỉnh *D*.

GIẢI

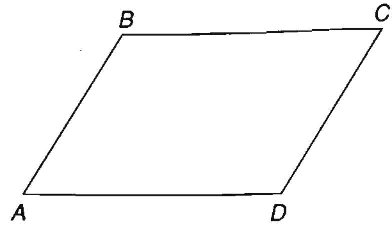
Giả sử $D = (x_D ; y_D)$.

Ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD} = \left(x_D + 1 ; y_D - 3\right)$,

$\overrightarrow{BC} = (-2 ; -3)$ (h.1.32). Do đó

$$\begin{cases} x_D + 1 = -2 \\ y_D - 3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -3 \\ y_D = 0. \end{cases}$$

Vậy toạ độ đỉnh D là $(-3 ; 0)$.



Hình 1.32



VẤN ĐỀ 3

Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $k\vec{u}$.

1. Phương pháp

Tính theo các công thức toạ độ của $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $k\vec{u}$.

2. Các ví dụ



Ví dụ 1. Cho $\vec{u} = (3 ; -2)$, $\vec{v} = (7 ; 4)$.

Tính toạ độ của các vectơ $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $2\vec{u}$, $3\vec{u} - 4\vec{v}$, $-(3\vec{u} - 4\vec{v})$.

GIẢI

$\vec{u} + \vec{v} = (10 ; 2)$, $\vec{u} - \vec{v} = (-4 ; -6)$, $2\vec{u} = (6 ; -4)$

$3\vec{u} = (9 ; -6)$, $4\vec{v} = (28 ; 16)$.

Vậy $3\vec{u} - 4\vec{v} = (-19 ; -22)$ và $-(3\vec{u} - 4\vec{v}) = (19 ; 22)$.



Ví dụ 2. Tìm x để các cặp vectơ sau cùng phương :

a) $\vec{a} = (2 ; 3)$, $\vec{b} = (4 ; x)$

b) $\vec{u} = (0 ; 5)$, $\vec{v} = (x ; 7)$

c) $\vec{m} = (x ; -3)$, $\vec{n} = (-2 ; 2x)$.

GIẢI

a) $\frac{4}{2} = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 6.$

b) $x = 0.$

c) $\frac{x}{-2} = \frac{-3}{2x} \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}.$



VẤN ĐỀ 4

Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song bằng toạ độ

1. Phương pháp

Sử dụng các điều kiện cần và đủ sau :

- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$;
- Hai vectơ $\vec{a},\ \vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ Có số k để $\vec{a} = k\vec{b}.$

2. Các ví dụ



Ví dụ 1. Cho ba điểm $A(-1 ; 1)$, $B(1 ; 3)$, $C(-2 ; 0)$. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

GIẢI

$\overrightarrow{AB} = (2 ; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (-1 ; -1)$.

Vậy $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$. Do đó ba điểm A, B, C thẳng hàng.



Ví dụ 2. Cho $A(3 ; 4)$, $B(2 ; 5)$. Tìm x để điểm $C(-7 ; x)$ thuộc đường thẳng AB.

GIẢI

Điểm C thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi : ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}.$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1 ; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-10 ; x - 4)$.

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{-10}{-1} = \frac{x-4}{1} \Rightarrow x - 4 = 10 \Rightarrow x = 14.$$

 **Ví dụ 3.** Cho bốn điểm $A(0\ ;\ 1)$, $B(1\ ;\ 3)$, $C(2\ ;\ 7)$, $D(0\ ;\ 3)$. Chứng minh hai đường thẳng AB và CD song song.

GIẢI

$\overrightarrow{AB} = (1\ ;\ 2)$, $\overrightarrow{CD} = (-2\ ;\ -4)$. Vậy $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$. Do đó hai đường thẳng AB và CD song song hoặc trùng nhau.

Ta có $\overrightarrow{AC} = (2\ ;\ 6)$, mà $\overrightarrow{AB} = (1\ ;\ 2)$. Vậy hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$ không cùng phương. Do đó điểm C không thuộc đường thẳng AB. Vậy $AB \parallel CD$.



VẤN ĐỀ 5

Tính toạ độ trung điểm của một đoạn thẳng, toạ độ của trọng tâm một tam giác

1. Phương pháp

Sử dụng các công thức sau :

- Toạ độ trung điểm của một đoạn thẳng bằng trung bình cộng các toạ độ tương ứng của hai đầu mút.
- Toạ độ của trọng tâm tam giác bằng trung bình cộng các toạ độ tương ứng của ba đỉnh.

2. Các ví dụ

 **Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC với $A(3\ ;\ 2)$, $B(-11\ ;\ 0)$, $C(5\ ;\ 4)$. Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác.

GIẢI

Theo công thức toạ độ của trọng tâm tam giác ta có

$$x_G = \frac{3-11+5}{3} = -1,\ y_G = \frac{2+0+4}{3} = 2.$$

 **Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC có $A(1\ ;\ -1)$, $B(5\ ;\ -3)$ đỉnh C trên Oy và trọng tâm G trên Ox. Tìm toạ độ của C.

GIẢI

Vì C nằm trên Oy nên ta có $C(0\ ;\ y)$. Vì trọng tâm G nằm trên Ox nên ta có $G(x\ ;\ 0)$. Theo công thức toạ độ của trọng tâm tam giác ta có

$$y_G = \frac{-1-3+y}{3} = 0 \Rightarrow y = 4.$$

Vậy C có toạ độ là $(0\ ;\ 4)$.



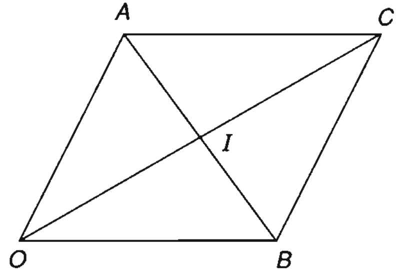
Ví dụ 3. Cho $A(-2\ ;\ 1)$, $B(4\ ;\ 5)$. Tìm toạ độ trung điểm I của đoạn thẳng AB và tìm toạ độ điểm C sao cho tứ giác $OACB$ là hình bình hành, O là gốc toạ độ.

GIẢI

Theo công thức toạ độ trung điểm ta có

$$x_I = \frac{-2+4}{2} = 1\ ; \qquad y_I = \frac{1+5}{2} = 3.$$

Vậy toạ độ I là $(1\ ;\ 3)$ (h.1.33).



Hình 1.33

Tứ giác $OACB$ là hình bình hành khi và chỉ khi I là trung điểm của OC. Do đó

$$\frac{x_C+0}{2} = 1 \Rightarrow x_C = 2.$$

$$\frac{y_C+0}{2} = 3 \Rightarrow y_C = 6.$$

Vậy toạ độ C là $(2\ ;\ 6)$.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.36. Viết toạ độ của các vectơ sau :

$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$; $\qquad \vec{b} = \frac{1}{3}\vec{i} - 5\vec{j}$; $\qquad \vec{c} = 3\vec{i}$; $\qquad \vec{d} = -2\vec{j}$.

1.37. Viết vectơ $\vec{u}$ dưới dạng $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ khi biết toạ độ của $\vec{u}$ là :
$(2\ ;\ -3)$, $(-1\ ;\ 4)$, $(2\ ;\ 0)$, $(0\ ;\ -1)$, $(0\ ;\ 0)$.

1.38. Cho $\vec{a} = (1 ; -2)$, $\vec{b} = (0 ; 3)$. Tìm toạ độ của các vectơ
$\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{z} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$.

1.39. Xét xem các cặp vectơ sau có cùng phương không ? Trong trường hợp cùng phương thì xét xem chúng cùng hướng hay ngược hướng.

a) $\vec{a} = (2 ; 3)$, $\vec{b} = (-10 ; -15)$.

b) $\vec{u} = (0 ; 7)$, $\vec{v} = (0 ; 8)$.

c) $\vec{m} = (-2 ; 1)$, $\vec{n} = (-6 ; 3)$.

d) $\vec{c} = (3 ; 4)$, $\vec{d} = (6 ; 9)$.

e) $\vec{e} = (0 ; 5)$, $\vec{f} = (3 ; 0)$.

1.40. a) Cho $A(-1 ; 8)$, $B(1 ; 6)$, $C(3 ; 4)$. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b) Cho $A(1 ; 1)$, $B(3 ; 2)$ và $C(m + 4 ; 2m + 1)$. Tìm m để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

1.41. Cho bốn điểm $A(-2 ; -3)$, $B(3 ; 7)$, $C(0 ; 3)$, $D(-4 ; -5)$.
Chứng minh rằng hai đường thẳng AB và CD song song với nhau.

1.42. Cho tam giác ABC. Các điểm $M(1 ; 1)$, $N(2 ; 3)$, $P(0 ; -4)$ lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Tính toạ độ các đỉnh của tam giác.

1.43. Cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2 ; -3)$, $B(4 ; 5)$, $C(0 ; -1)$. Tính toạ độ của đỉnh D.

1.44. Cho tam giác ABC có $A(-5 ; 6)$, $B(-4 ; -1)$, $C(4 ; 3)$. Tìm toạ độ trung điểm I của AC. Tìm toạ độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

1.45. Cho tam giác ABC có $A(-3 ; 6)$, $B(9 ; -10)$, $C(-5 ; 4)$.

a) Tìm toạ độ của trọng tâm G của tam giác ABC.

b) Tìm toạ độ điểm D sao cho tứ giác $BGCD$ là hình bình hành.

1.46. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Chọn hệ toạ độ $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, trong đó O là trung điểm của cạnh BC, $\vec{i}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OC}$, $\vec{j}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OA}$.

a) Tính toạ độ của các đỉnh của tam giác ABC.

b) Tìm toạ độ trung điểm E của AC.

c) Tìm toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

1.47. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Chọn hệ toạ độ $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, trong đó O là tâm của lục giác đều, hai vectơ $\vec{i}$ và $\overrightarrow{OD}$ cùng hướng, $\vec{j}$ và $\overrightarrow{EC}$ cùng hướng. Tính toạ độ các đỉnh của lục giác biết độ dài cạnh của lục giác là 6.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I

1.48. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Dựa vào các điểm A, B, C, D, O, M, N đã cho hãy :

a) Kể tên hai vectơ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$, hai vectơ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$, hai vectơ ngược hướng với $\overrightarrow{AB}$ (các vectơ kể ra này đều khác $\vec{0}$).

b) Chỉ ra một vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{MO}$, một vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{OB}$.

1.49. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD. Nối AF và CE, hai đường này cắt đường chéo BD lần lượt tại M và N. Chứng minh $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$.

1.50. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ với A, D, F không thẳng hàng. Dựng các vectơ $\overrightarrow{EH}$ và $\overrightarrow{FG}$ bằng vectơ $\overrightarrow{AD}$. Chứng minh tứ giác $CDGH$ là hình bình hành.

1.51. Cho bốn điểm A, B, C, D. Tìm các vectơ :

a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$;   b) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$.

1.52. Cho lục giác đều $ABCDEF$ và M là một điểm tuỳ ý. Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF}.$$

1.53. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

1.54. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Trên cạnh AC lấy hai điểm E và F sao cho $AE = EF = FC$, BE cắt trung tuyến AM tại N. Tính $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MN}$.

1.55. Cho hai điểm A và B. Điểm M thoả mãn điều kiện $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$. Chứng minh rằng $OM = \frac{1}{2}AB$, trong đó O là trung điểm của AB.

1.56. Cho tam giác ABC và một điểm M tuỳ ý. Chứng minh rằng vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M. Hãy dựng điểm D sao cho $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$.

1.57. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P là những điểm được xác định như sau :

$$\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC},\ \overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{NA},\ \overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{PB}.$$

a) Chứng minh $2\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$ với mọi điểm O.

b) Chứng minh hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

1.58. Cho hình vuông $ABCD$, E là trung điểm của CD. Hãy phân tích $\overrightarrow{AE}$ theo hai vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AD},\ \vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

1.59. Cho các điểm A, B, C trên trục $(O\ ;\ \vec{e})$ có toạ độ lần lượt là $5\ ;\ -3\ ;\ -4$. Tính độ dài đại số của $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BC}$.

1.60. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có $AC = 8$, $BD = 6$. Chọn hệ toạ độ $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$ sao cho $\vec{i}$ và $\overrightarrow{OC}$ cùng hướng, $\vec{j}$ và $\overrightarrow{OB}$ cùng hướng.

a) Tính toạ độ các đỉnh của hình thoi ;

b) Tìm toạ độ trung điểm I của BC và trọng tâm của tam giác ABC ;

c) Tìm toạ độ điểm đối xứng I' của I qua tâm O. Chứng minh A, I', D thẳng hàng ;

d) Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{BC}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1.61. Chọn khẳng định đúng :

(A) Hai vectơ có giá vuông góc thì cùng phương ;

(B) Hai vectơ cùng phương thì giá của chúng song song ;

(C) Hai vectơ cùng phương thì cùng hướng ;

(D) Hai vectơ cùng ngược hướng với vectơ thứ ba thì cùng hướng.

1.62. Nếu hai vectơ bằng nhau thì chúng

(A) có độ dài bằng nhau ; (B) cùng phương ;

(C) cùng điểm gốc ; (D) cùng hướng.

Hãy tìm khẳng định sai.

1.63. Số các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là 2 trong 6 điểm phân biệt cho trước là

(A) 12 ; (B) 21 ; (C) 27 ; (D) 30.

1.64. Số các vectơ có điểm đầu là một trong 5 điểm phân biệt cho trước và có điểm cuối là một trong 4 điểm phân biệt cho trước là

(A) 20 ; (B) 10 ; (C) 9 ; (D) 14.

1.65. Chọn khẳng định đúng trong các hệ thức sau :

(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$; (B) $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NP}$;

(C) $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}$; (D) $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}$.

1.66. Cộng các vectơ có cùng độ dài bằng 5 và cùng giá ta được kết quả sau :

(A) Cộng 5 vectơ ta được kết quả là $\vec{0}$;

(B) Cộng 4 vectơ đôi một ngược hướng ta được $\vec{0}$;

(C) Cộng 121 vectơ ta được $\vec{0}$;

(D) Cộng 25 vectơ ta được vectơ có độ dài là 10.

Hãy chọn khẳng định đúng.

1.67. Chọn đẳng thức đúng :

(A) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$; (B) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}$;

(C) $\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{NM}$; (D) $\overrightarrow{AA}-\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}$.

1.68. Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các vectơ khác $\vec{0}$ và $\vec{a}$ là vectơ đối của $\vec{b}$ thì chúng

(A) cùng phương ; (B) cùng độ dài ;

(C) ngược hướng ; (D) có chung điểm đầu.

Hãy chọn khẳng định sai.

1.69. Vectơ tổng $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}$ bằng

(A) $\overrightarrow{MR}$; (B) $\overrightarrow{MN}$; (C) $\overrightarrow{PR}$; (D) $\overrightarrow{MP}$.

1.70. Cho tam giác đều *ABC*. Hãy chọn đẳng thức đúng

(A) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$; (B) $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$;

(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$; (D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.

1.71. Cho hình bình hành *ABCD* tâm *O*. Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau :

(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$; (B) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$;

(C) $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BO}$; (D) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CB}$.

1.72. Cho G là trọng tâm của tam giác ABC và I là trung điểm của BC. Hãy chọn đẳng thức đúng :

(A) $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$;

(B) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$;

(C) $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$;

(D) $\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

1.73. Cho tam giác ABC, E là điểm trên cạnh BC sao cho $BE = \frac{1}{4}BC$. Hãy chọn đẳng thức đúng :

(A) $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$;

(B) $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$;

(C) $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$;

(D) $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

1.74. Cho tam giác ABC và I là trung điểm của cạnh BC. Điểm G có tính chất nào sau đây thì G là trọng tâm của tam giác ABC :

(A) $GA = 2GI$;

(B) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$;

(C) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$;

(D) $GI = \frac{1}{3}AI$?

1.75. Cho $\vec{a} = (1 ; 2)$, $\vec{b} = (2 ; 3)$, $\vec{c} = (-6 ; -10)$. Hãy chọn đẳng thức đúng :

(A) $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{c}$ cùng hướng ;

(B) $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} - \vec{b}$ cùng phương ;

(C) $\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{c}$ cùng hướng ;

(D) $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{c}$ ngược hướng.

1.76. Cho ba điểm $A(0 ; 3)$, $B(1 ; 5)$, $C(-3 ; -3)$. Chọn khẳng định đúng.

(A) A, B, C không thẳng hàng ;

(B) A, B, C thẳng hàng ;

(C) Điểm B ở giữa A và C ;

(D) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

1.77. Cho tam giác ABC có $A(1 ; -3)$, $B(2 ; 5)$, $C(0 ; 7)$. Trọng tâm của tam giác ABC là điểm có toạ độ :

(A) $(0 ; 5)$;

(B) $(1 ; \sqrt{2})$;

(C) $(3 ; 0)$;

(D) $(1 ; 3)$.

1.78. Cho hai điểm $A(3 ; -5)$, $B(1 ; 7)$. Chọn khẳng định đúng :

(A) Trung điểm của đoạn thẳng AB là điểm $(4 ; 2)$;

(B) Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $(2 ; -12)$;

(C) Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $(-2 ; 12)$;

(D) Trung điểm của đoạn thẳng AB là điểm $(2 ; -1)$.

1.79. Cho $\vec{a} = (2 ; -4)$, $\vec{b} = (-5 ; 3)$. Toạ độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$ là

(A) $\vec{u} = (7 ; -7)$;

(B) $\vec{u} = (9 ; -11)$;

(C) $\vec{u} = (9 ; 5)$;

(D) $\vec{u} = (-1 ; 5)$.

1.80. Cho $M(1 ; -1)$, $N(3 ; 2)$, $P(0 ; -5)$ lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA và AB của tam giác ABC. Toạ độ của điểm A là

(A) $(2 ; -2)$; (B) $(5 ; 1)$;

(C) $(\sqrt{5} ; 0)$; (D) $(2 ; \sqrt{2})$.

1.81. Cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-2 ; 3)$, $B(0 ; 4)$, $C(5 ; -4)$. Toạ độ đỉnh D là

(A) $(\sqrt{7} ; 2)$; (B) $(3 ; -5)$;

(C) $(3 ; 7)$; (D) $(3 ; \sqrt{2})$.

1.82. Cho $M(5 ; -3)$. Kẻ MM_1 vuông góc với Ox, MM_2 vuông góc với Oy. Khẳng định nào đúng ?

(A) $\overline{OM_1} = -5$;

(B) $\overline{OM_2} = 3$;

(C) $\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$ có toạ độ $(-5 ; 3)$;

(D) $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ có toạ độ $(5 ; -3)$.

1.83. Cho bốn điểm $A(0 ; 1)$, $B(-1 ; -2)$, $C(1 ; 5)$, $D(-1 ; -1)$.
Khẳng định nào đúng ?

(A) Ba điểm A, B, C thẳng hàng ;

(B) Hai đường thẳng AB và CD song song ;

(C) Ba điểm A, B, D thẳng hàng ;

(D) Hai đường thẳng AD và BC song song.

1.84. $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là hai vectơ đơn vị của hệ trục toạ độ $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Toạ độ của vectơ $2\vec{i} + \vec{j}$ là

(A) $(1 ; -2)$;

(B) $(-3 ; 4)$;

(C) $(2 ; 1)$;

(D) $(0 ; \sqrt{3})$.

1.85. Cho tam giác ABC trọng tâm là gốc toạ độ, biết toạ độ hai đỉnh là $A(-3 ; 5)$, $B(0 ; 4)$. Toạ độ của đỉnh C là

(A) $(-5 ; 1)$;

(B) $(3 ; 7)$;

(C) $(3 ; -9)$;

(D) $(\sqrt{5} ; 0)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

§1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

1.1. a) Với hai điểm A, B có hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$;

b) Với ba điểm A, B, C có 6 vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$;

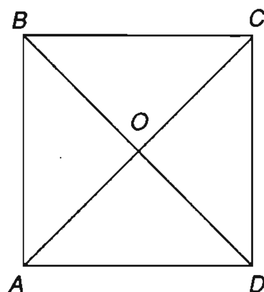
c) Với bốn điểm A, B, C, D có 12 vectơ (học sinh tự liệt kê).

1.2. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$,

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$,

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$,

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA}$ (h.1.34).

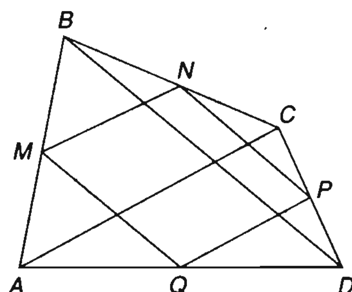


Hình 1.34

1.3. $MN = PQ$ và $MN \parallel PQ$ vì chúng đều bằng $\frac{1}{2}AC$ và đều song song với AC (h.1.35).

Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành nên ta có

$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{NM}$.

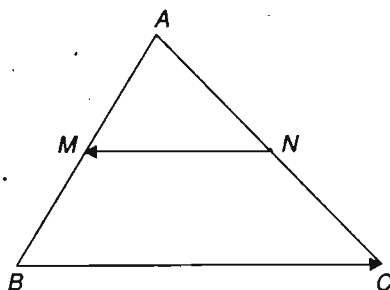


Hình 1.35

1.4. $MN \parallel BC$ và $MN = \frac{1}{2}BC$,

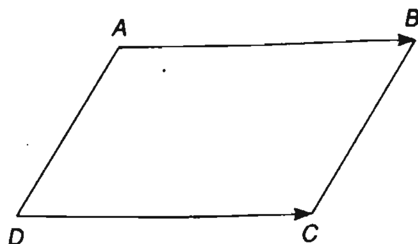
hay $|\overrightarrow{NM}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$ (h.1.36).

Vì $MN \parallel BC$ nên $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.



Hình 1.36

1.5. Tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên $AB = DC$ và $AB \,//\, DC$. Do đó $ABCD$ là hình bình hành, suy ra : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (h.1.37).



Hình 1.37

1.6. a) Nếu $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng và $|\overrightarrow{AB}| > |\overrightarrow{AC}|$ thì điểm C nằm giữa hai điểm A và B (h.1.38) :



Hình 1.38

b) Nếu $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng thì điểm A nằm giữa hai điểm B và C (h.1.39) :



Hình 1.39

c) Nếu $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương thì chúng có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

Trường hợp $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng :

– Nếu $|\overrightarrow{AB}| > |\overrightarrow{AC}|$ thì C nằm giữa A và B.

– Nếu $|\overrightarrow{AB}| < |\overrightarrow{AC}|$ thì B nằm giữa A và C.

Trường hợp $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng thì A nằm giữa B và C.

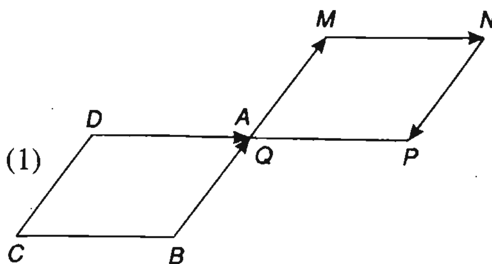
1.7. Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ (h.1.40).

Suy ra $AM = NP$ và $AM \,//\, NP$. Vậy tứ giác $AMNP$ là hình bình hành. (1)

Ta có $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$



Hình 1.40

suy ra $PQ = MN$ và $PQ \parallel MN$. Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A \equiv Q$ hay $\overrightarrow{AQ} = \vec{0}$.

§2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

1.8. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.

1.9. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}$. Như vậy hệ thức cần chứng minh tương đương với đẳng thức đúng.

1.10. a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} \Rightarrow OB = OA$, ba điểm A, O, B thẳng hàng và điểm O ở giữa A và B. Suy ra O là trung điểm của AB.

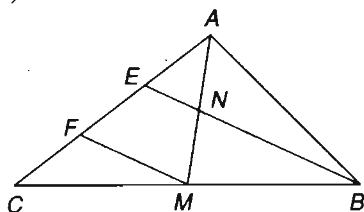
b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = \vec{0} \Rightarrow B \equiv O$.

1.11. Trong tam giác đều ABC, tâm O của đường tròn ngoại tiếp cũng là trọng tâm của tam giác. Vậy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

1.12. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$.

1.13. $FM \parallel BE$ vì FM là đường trung bình của tam giác CEB.

Ta có $EA = EF$. Vậy EN là đường trung bình của tam giác AFM. Suy ra N là trung điểm của AM. Vậy $\overrightarrow{NA} = -\overrightarrow{NM}$ (h.1.41).



Hình 1.41

1.14. a) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}$. Vậy mọi điểm M đều thoả mãn hệ thức a).

b) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow A \equiv B$, vô lí. Vậy không có điểm M nào thoả mãn hệ thức b).

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$. Vậy M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

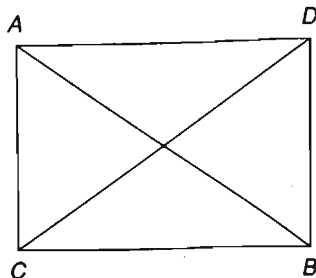
1.15. Vẽ hình bình hành $CADB$. Ta có $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD}$,

do đó $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = CD$.

Vì $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA}$, do đó $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}| = BA$.

Từ $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}|$ suy ra $CD = AB$ (h.1.42).

Vậy tứ giác $CADB$ là hình chữ nhật. Ta có tam giác ACB vuông tại C.



Hình 1.42

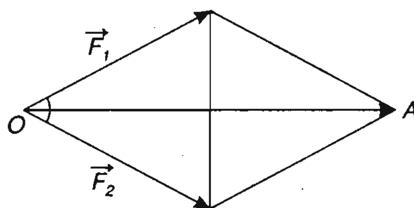
1.16. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DE} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}$.

1.17. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ trong đó $OACB$ là hình bình hành. OC là phân giác góc $\widehat{AOB}$ khi và chỉ khi $OACB$ là hình thoi, tức là $OA = OB$.

1.18. $\vec{F_1} + \vec{F_2} = \overrightarrow{OA}$

$|\vec{F_1} + \vec{F_2}| = OA = 100\sqrt{3}$.

Vậy cường độ của hợp lực là $100\sqrt{3}$ N (h.1.43).



Hình 1.43

1.19. (Xem h.1.44)

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

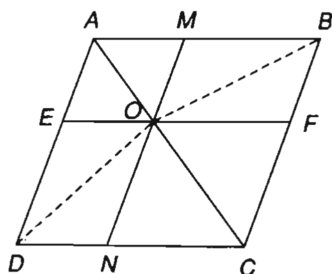
$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$.

Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên ta có $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$.

Vậy $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.

b) Tứ giác $AMOE$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MO}$ (1)

Tứ giác $OFCN$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{FN} = \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{FC}$ (2)



Hình 1.44

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{FN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{FC}$

$$= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{FO}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{FC}) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$$

(vì $\overrightarrow{FO} = \overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{BF}$).

Vậy $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{FN}$.

§3. TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ

1.20. a) $m = 1$; b) $m = -1$; c) $m = 4$;

d) $m = -\frac{1}{3}$; e) $m = 0$; g) Không tồn tại ;

h) Mọi giá trị của m đều thoả mãn.

1.21. a) $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$ và $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng. Ta có $|m\vec{a}| = |m||\vec{a}|$, $|m\vec{b}| = |m||\vec{b}|$, do đó $|m\vec{a}| = |m\vec{b}|$.

$m\vec{a}$ và $m\vec{b}$ cùng hướng. Vậy $m\vec{a} = m\vec{b}$.

b) $m\vec{a} = m\vec{b} \Rightarrow |m\vec{a}| = |m\vec{b}| \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$ vì $m \neq 0$;

$m\vec{a}$ và $m\vec{b}$ cùng hướng $\Rightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

Vậy $\vec{a} = \vec{b}$.

c) $m\vec{a} = n\vec{a} \Rightarrow |m\vec{a}| = |n\vec{a}| \Rightarrow |m| = |n|$ vì $\vec{a} \neq \vec{0}$;

$m\vec{a}$ và $n\vec{a}$ cùng hướng $\Rightarrow m$ và n cùng dấu.

Vậy $m = n$.

1.22. $\vec{a} + \vec{a} + ... + \vec{a} = (1 + 1 + ... + 1)\vec{a} = n\vec{a}$.

1.23. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GI} = \vec{0}$ (I là trung điểm của BC)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}$.

Từ đó suy ra ba điểm A, G, I thẳng hàng, trong đó $GA = 2GI$, G nằm giữa A và I.

Vậy G là trọng tâm của tam giác ABC.

1.24. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và $A'B'C'$. Ta có

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'}$$
$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'}$$
$$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'}.$$

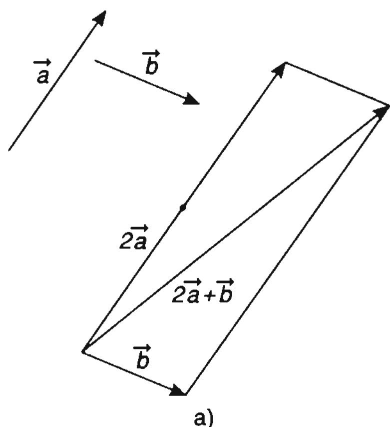
Cộng từng vế của ba đẳng thức trên ta được

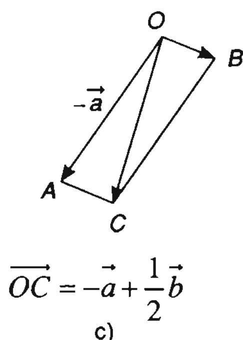
$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

Do đó, nếu $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ thì $\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$ hay $G \equiv G'$.

☞ ***Chú ý :*** Từ chứng minh trên cũng suy ra rằng nếu hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm thì $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

1.25. (Xem h.1.45)





Hình 1.45

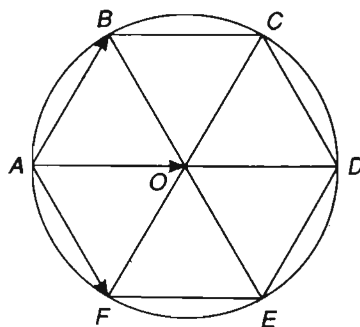
Hãy tự vẽ trường hợp $\vec{a} - 2\vec{b}$.

1.26. (Xem h.1.46)

a) $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}) = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}$.

b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right| = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Hình 1.46

1.27. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC. (h.1.47)

Ta có tứ giác $AFME$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$

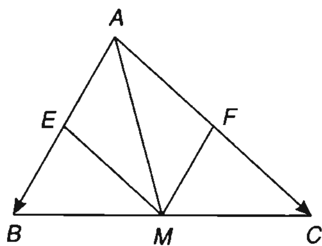
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Có thể chứng minh cách khác như sau :

Vì M là trung điểm của BC nên $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

hay $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

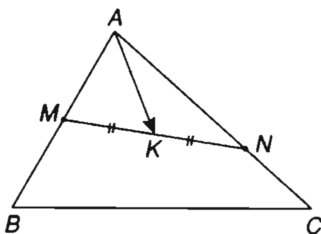


Hình 1.47

1.28. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ (h.1.48)



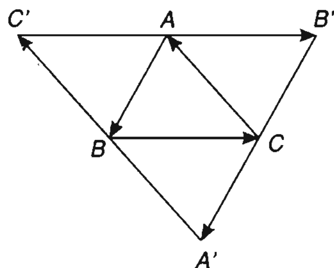
Hình 1.48

1.29. (Xem h.1.49)

a) $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CA} \Rightarrow$ tứ giác $ACBC'$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{CB}$.

$\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0} \Rightarrow A$ là trung điểm của $B'C'$.

b) Vì tứ giác $ACBC'$ là hình bình hành nên CC' chứa trung tuyến của tam giác ABC xuất phát từ đỉnh C. Tương tự như vậy với AA', BB'. Do đó AA', BB', CC' đồng quy tại trọng tâm G của tam giác ABC.



Hình 1.49

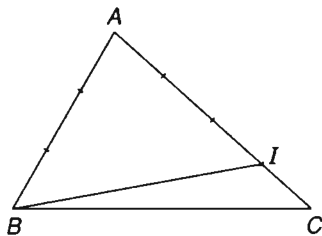
1.30. (Xem h.1.50)

a) $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

b) $\frac{2}{3}\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Vậy $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$. Suy ra ba điểm B, J, I thẳng hàng.

Học sinh tự dựng điểm J.

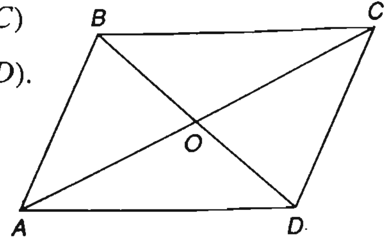


Hình 1.50

1.31. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MO}$ (vì O là trung điểm của AC)

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}$ (vì O là trung điểm của BD).

Vậy $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$ (h.1.51).



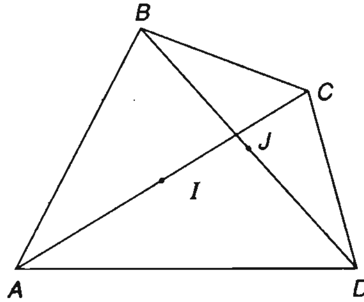
Hình 1.51

1.32. $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}$

$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DJ}$ (h.1.52).

Cộng từng vế hai đẳng thức trên ta được

$2\overrightarrow{IJ}=(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC})+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+(\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{DJ})\ =\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}.$



Hình 1.52

1.33. Gọi G là trọng tâm của tam giác ANP. Khi đó $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\vec{0}$ (h.1.53).

Ta có $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GQ}\ =\ \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{PQ}$

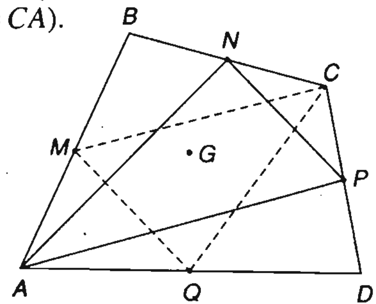
$$=(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP})+\overrightarrow{AC}+(\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{PQ})$$

$$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$$

(vì $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ nên $\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{CA}$).

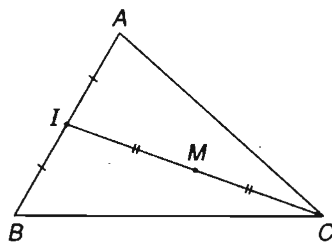
Vậy $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GQ}=\vec{0}.$

Suy ra G là trọng tâm của tam giác CMQ.



Hình 1.53

1.34. (Xem h.1.54)



Hình 1.54

a) $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow K$ là trọng tâm của tam giác ABC.

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ (I là trung điểm của AB)

hay $\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MC}=\vec{0} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của IC.

1.35. (Xem h.1.55)

a) Vì AD là đường kính của đường tròn tâm O nên $BD \perp AB$, $DC \perp AC$.

Ta có $CH \perp AB$, $BH \perp AC$ nên suy ra $CH \parallel BD$ và $BH \parallel DC$.

Vậy tứ giác $HCDB$ là hình bình hành.

b) Vì O là trung điểm của AD nên $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HO}$ (1)

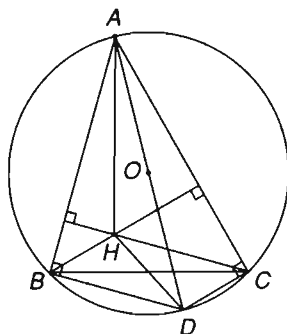
Vì tứ giác $HCDB$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$. Vậy từ (1) suy ra

$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$ (2)

Theo quy tắc ba điểm, từ (2) suy ra

$\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{HO}$.

Vậy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$. (3)



Hình 1.55

c) G là trọng tâm của tam giác ABC.

Ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$.

Từ (3) suy ra $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$. Vậy ba điểm O, H, G thẳng hàng.

Trong một tam giác trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O thẳng hàng.

§4. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ

1.36. $\vec{a} = (2 ; 3)$, $\vec{b} = \left(\frac{1}{3};-5\right)$, $\vec{c} = (3 ; 0)$, $\vec{d} = (0 ; -2)$.

1.37. $\vec{u} = (2 ; -3) \Rightarrow \vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$

$\vec{u} = (-1 ; 4) \Rightarrow \vec{u} = -\vec{i} + 4\vec{j}$

$\vec{u} = (2 ; 0) \Rightarrow \vec{u} = 2\vec{i}$

$\vec{u} = (0 ; -1) \Rightarrow \vec{u} = -\vec{j}$

$\vec{u} = (0 ; 0) \Rightarrow \vec{u} = 0\vec{i} + 0\vec{j} = \vec{0}$.

1.38. $\vec{x} = (1 ; 1)$, $\vec{y} = (1 ; -5)$, $\vec{z} = (3 ; -18)$.

1.39. a) $\vec{a}$, $\vec{b}$ ngược hướng ;

b) $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng hướng ;

c) $\vec{m}$, $\vec{n}$ cùng hướng ;

d) $\vec{c}$, $\vec{d}$ không cùng phương ;

e) $\vec{e}$, $\vec{f}$ không cùng phương.

1.40. a) $\overrightarrow{AB} = (2 ; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (4 ; -4)$.

Vậy $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow$ ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b) $\overrightarrow{AB} = (2 ; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (m + 3 ; 2m)$

Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \dfrac{m+3}{2} = \dfrac{2m}{1} \Leftrightarrow m = 1$.

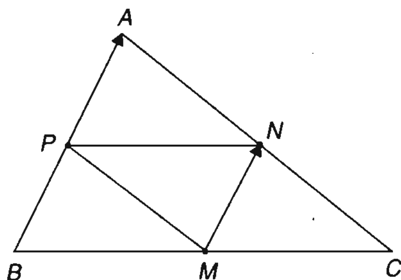
1.41. $\overrightarrow{AB} = (5 ; 10)$, $\overrightarrow{CD} = (-4 ; -8)$. Ta có $\overrightarrow{CD} = -\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}$, vậy hai đường thẳng AB và CD song song hoặc trùng nhau.

Ta có $\overrightarrow{AC} = (2 ; 6)$ và $\overrightarrow{AB}$ không cùng phương vì $\dfrac{5}{2} \neq \dfrac{10}{6}$.

Vậy $AB \parallel CD$.

1.42. $\overrightarrow{MN} = (1 ; 2)$

$\overrightarrow{PA} = (x_A ; y_A + 4)$ (h.1.56).



Hình 1.56

Vì $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{MN}$ suy ra $\begin{cases} x_A = 1 \\ y_A + 4 = 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A = 1 \\ y_A = -2. \end{cases}$$

Tương tự, ta tính được $\begin{cases} x_B = -1 \\ y_B = -6 \end{cases}$ và $\begin{cases} x_C = 3 \\ y_C = 8. \end{cases}$

Vậy toạ độ các đỉnh của tam giác là $A(1 ; -2)$, $B(-1 ; -6)$ và $C(3 ; 8)$.

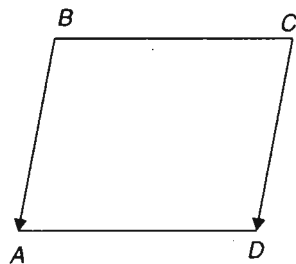
1.43. $\overrightarrow{BA} = (-2 ; -8)$

$\overrightarrow{CD} = (x_D ; y_D + 1)$. Vì $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ nên

$$\begin{cases} x_D = -2 \\ y_D + 1 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -2 \\ y_D = -9. \end{cases}$$

Vậy toạ độ đỉnh D là $(-2 ; -9)$ (h.1.57).

Nhận xét : Ta có thể tính toạ độ đỉnh D dựa vào biểu thức $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.



Hình 1.57

1.44. Gọi I là trung điểm của AC.

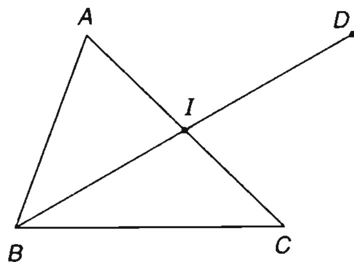
$$x_I = \frac{-5+4}{2} = -\frac{1}{2} \ ; \ y_I = \frac{6+3}{2} = \frac{9}{2}.$$

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow I$ là trung điểm của BD.

Vậy $\begin{cases} \dfrac{x_D - 4}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{y_D - 1}{2} = \dfrac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D - 4 = -1 \\ y_D - 1 = 9 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_D = 3 \\ y_D = 10. \end{cases}$$

Vậy toạ độ đỉnh D là $(3 ; 10)$ (h.1.58).

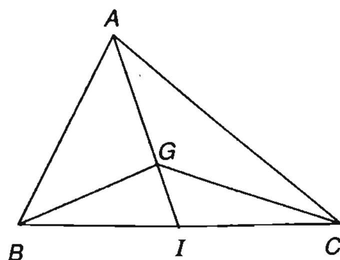


Hình 1.58

1.45. $x_G = \dfrac{-3+9-5}{3} = \dfrac{1}{3}$;

$y_G = \dfrac{6-10+4}{3} = 0$ (h.1.59)

Tứ giác $BGCD$ là hình bình hành thì toạ độ điểm D là $D\left(\dfrac{11}{3}\ ;\ -6\right)$.



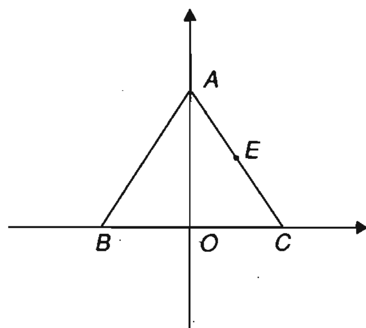
Hình 1.59

1.46. (Xem h.1.60)

a) $A\left(0\ ;\ \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(-\dfrac{a}{2}\ ;\ 0\right)$, $C\left(\dfrac{a}{2}\ ;\ 0\right)$

b) $E\left(\dfrac{a}{4}\ ;\ \dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$

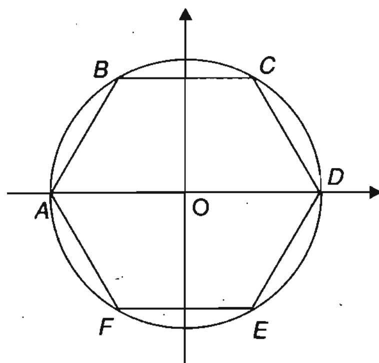
c) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều trùng với trọng tâm của tam giác $G\left(0\ ;\ \dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)$.



Hình 1.60

1.47. $A(-6\ ;\ 0)$, $D(6\ ;\ 0)$, $B(-3\ ;\ 3\sqrt{3})$, $C(3\ ;\ 3\sqrt{3})$, $F(-3\ ;\ -3\sqrt{3})$, $E(3\ ;\ -3\sqrt{3})$ (h.1.61).

Người ta có thể nhận xét về tính đối xứng của các đỉnh qua tâm O hoặc qua các trục Ox, Oy để tìm toạ độ các đỉnh của lục giác đều.



Hình 1.61

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I

1.48. (Xem h.1.62)

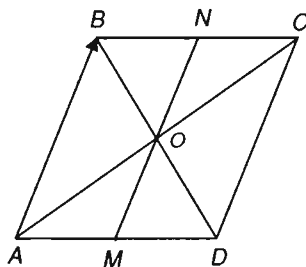
a) Hai vectơ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{MO}$, $\overrightarrow{CD}$;

Hai vectơ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{DC}$;

Hai vectơ ngược hướng với $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{NO}$.

b) Vectơ bằng $\overrightarrow{MO}$ là $\overrightarrow{ON}$;

Vectơ bằng $\overrightarrow{OB}$ là $\overrightarrow{DO}$.



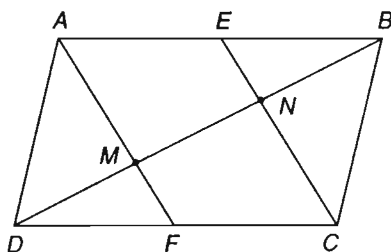
Hình 1.62

1.49. $AECF$ là hình bình hành $\Rightarrow EN \parallel AM$

E là trung điểm của $AB \Rightarrow N$ là trung điểm của BM, do đó $MN = NB$.

Tương tự, M là trung điểm của DN, do đó $DM = MN$.

Vậy $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$ (h.1.63).



Hình 1.63

1.50. $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$

$\Rightarrow$ tứ giác $FEHG$ là hình bình hành

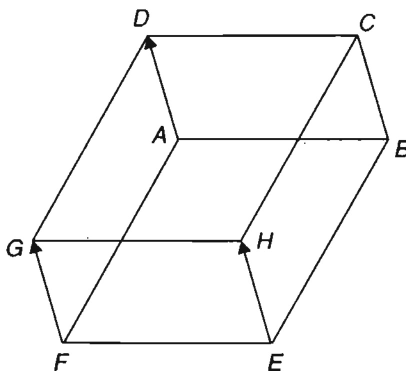
$\Rightarrow \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{FE}$ (h.1.64). (1)

Ta có $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$

$\Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{DC}$.

Vậy tứ giác $GHCD$ là hình bình hành.



Hình 1.64

1.51. a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$

b) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DD} = \vec{0}.$

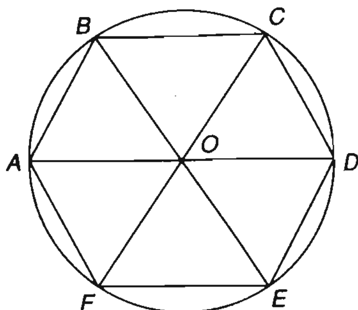
1.52. Gọi O là tâm lục giác đều. Khi đó O là trọng tâm của các tam giác đều ACE và BDF (h.1.65).

Do đó, với mọi điểm M ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} = 3\overrightarrow{MO}$$

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} = 3\overrightarrow{MO}$$

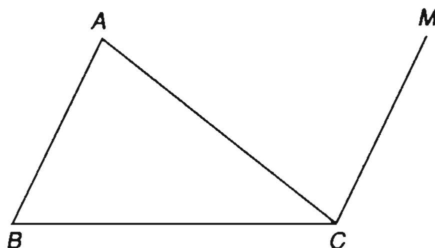
Vậy ta có đẳng thức cần chứng minh.



Hình 1.65

1.53. $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CM}$ (h.1.66).

M là đỉnh của hình bình hành $ABCM$.

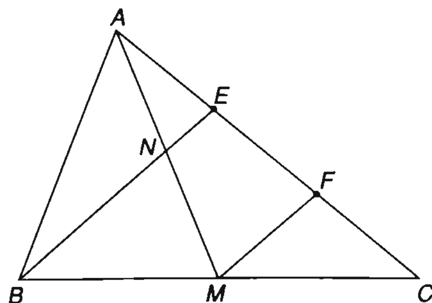


Hình 1.66

1.54. Ta có $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FC}$ (h.1.67).

Vì $MF \,//\, BE$ nên N là trung điểm của AM, suy ra $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MN} = \vec{0}.$

Do đó $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AC}.$

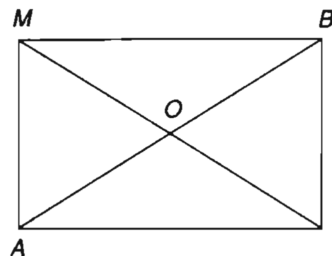


Hình 1.67

1.55. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MO} \Rightarrow |\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}| = 2MO$

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA} \Rightarrow |\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}| = AB$ (h.1.68).

Vậy $2MO = AB$ hay $OM = \frac{1}{2}AB$.



Hình 1.68

☞ ***Chú ý.*** Tập hợp các điểm M có tính chất $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}|$ là đường tròn đường kính AB.

1.56. $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$

$= 2\overrightarrow{ME}-2\overrightarrow{MC}$ (E là trung điểm cạnh AB)

$= 2(\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{MC})=2\overrightarrow{CE}.$

Vậy $\vec{v}$ không phụ thuộc vị trí của điểm M.

$\overrightarrow{CD}=\vec{v}=2\overrightarrow{CE}$ thì E là trung điểm của CD. Vậy ta dựng được điểm D.

1.57. (Xem h.1.69)

a) $3\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB} = 3(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MC})-(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB})$

$= (3\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM})+(3\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}) = 2\overrightarrow{OM}.$

b) Gọi S, Q và R lần lượt là trung điểm của BC, CA và AB.

$\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{CM}=\overrightarrow{SC}$

$\overrightarrow{NC}=3\overrightarrow{NA} \Rightarrow \overrightarrow{AN}=\overrightarrow{CQ}$

$\overrightarrow{PA}=3\overrightarrow{PB} \Rightarrow \overrightarrow{BP}=\overrightarrow{RB}=\overrightarrow{QS}.$

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Ta có

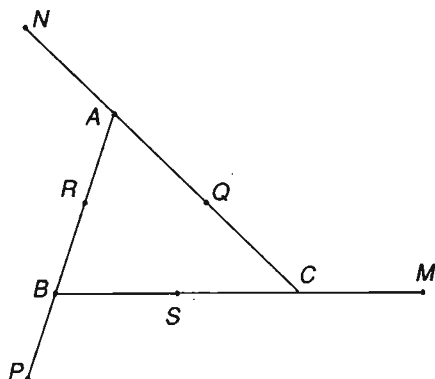
$\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP} =$

$= \overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BP}$

$= (\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+(\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{QS})$

$= \vec{0}+\vec{0}=\vec{0}.$

Vậy G là trọng tâm của tam giác MNP.

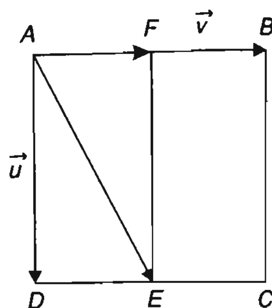


Hình 1.69

1.58. Gọi F là trung điểm của cạnh AB. Ta có

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

Vậy $\overrightarrow{AE} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ (h.1.70).



Hình 1.70

1.59. $\overline{AB} = -8$, $\overline{BA} = 8$, $\overline{AC} = -9$, $\overline{BC} = -1$.

1.60. (Xem h.1.71)

a) $A(-4\,;0)$, $C(4\,;0)$, $B(0\,;3)$, $D(0\,;-3)$.

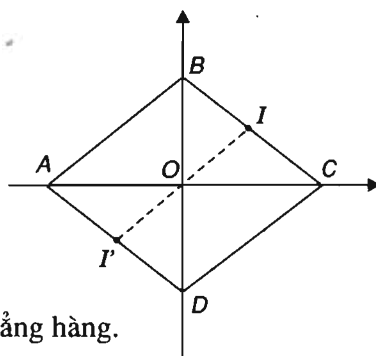
b) $I(2\,;\frac{3}{2})$, $G(0\,;1)$.

c) $I'(-2\,;-\frac{3}{2})$

$\overrightarrow{AI'} = (2;-\frac{3}{2})$, $\overrightarrow{AD} = (4\,;-3)$.

Vậy $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AI'}$. Suy ra ba điểm A, I', D thẳng hàng.

d) $\overrightarrow{AC} = (8\,;0)$, $\overrightarrow{BD} = (0\,;-6)$, $\overrightarrow{BC} = (4\,;-3)$.



Hình 1.71

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1.61. Chọn (D).

1.62. Chọn (C).

1.63. Với mỗi cặp hai điểm ta có 2 vectơ. Vậy số các vectơ không thể là số lẻ. Với 6 điểm thì có nhiều hơn 6 cặp điểm khác nhau, nên số vectơ phải lớn hơn 12.

Chọn (D).

1.64. Chọn (A).

1.65. Chọn (B).

1.66. Tổng một số lẻ vectơ có độ dài bằng 5 và cùng giá không thể là vectơ-không. Chọn (B).

1.67. Chọn (C).

1.68. Chọn (D).

1.69. Chọn (B).

1.70. Chọn (B).

1.71. Chọn (C).

1.72. $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GI}$ ngược hướng. Các cặp vectơ $\overrightarrow{IG}$, $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{AI}$ cũng ngược hướng. Chọn (B).

1.73. Khi phân tích $\overrightarrow{AE} = h\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$ thì hai số h, k không thể lớn hơn 1, không có số âm và không thể bằng nhau. Chọn (B).

1.74. Chọn (B).

1.75. Tính toạ độ của $\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{a}-\vec{b}$. Ta thấy $\vec{c} = -2(\vec{a}+\vec{b})$. Chọn (D).

1.76. $\overrightarrow{AB} = (1\ ;\ 2)$, $\overrightarrow{AC} = (-3\ ;\ -6)$. Chọn (B).

1.77. Tổng ba hoành độ và ba tung độ của ba đỉnh đều khác không và toạ độ không thể là $\sqrt{2}$. Chọn (D).

1.78. Chọn (C).

1.79. Chọn (B).

1.80. Kiểm tra đẳng thức $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{MN}$ bằng toạ độ. Chọn (A).

1.81. Kiểm tra đẳng thức $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ bằng toạ độ. Chọn (B).

1.82. Khẳng định đúng là (D) vì $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ và toạ độ của M là toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$. Chọn (D).

1.83. Chọn (B).

1.84. Nhận xét rằng toạ độ của $2\vec{i}+\vec{j}$ không thể là số âm và số vô tỉ. Chọn (C).

1.85. Tổng các hoành độ và tung độ của ba đỉnh phải bằng 0. Chọn (C).

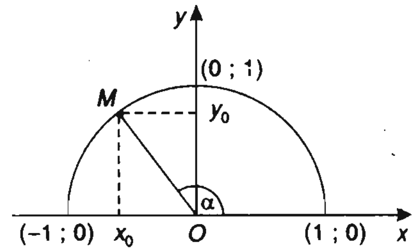
CHƯƠNG II

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

§1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ TỪ 0^o ĐẾN 180^o

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa : Với mỗi góc α ($0^o \le \alpha \le 180^o$) ta xác định được một điểm M trên nửa đường tròn đơn vị (h. 2.1) sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Giả sử điểm M có toạ độ là $M(x_0 ; y_0)$. Khi đó :



Hình 2.1

- Tung độ y_0 của điểm M gọi là *sin của góc* α và được kí hiệu là $\sin\alpha = y_0$.

- Hoành độ x_0 của điểm M gọi là *côsin của góc* α và được kí hiệu là $\cos\alpha = x_0$.

- Tỉ số $\dfrac{y_0}{x_0}$ với $x_0 \neq 0$ gọi là *tang của góc* α và được kí hiệu là $\tan\alpha = \dfrac{y_0}{x_0}$.

- Tỉ số $\dfrac{x_0}{y_0}$ với $y_0 \neq 0$ gọi là *côtang của góc* α và được kí hiệu là $\cot\alpha = \dfrac{x_0}{y_0}$.

2. Các hệ thức lượng giác

a) Giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

$$\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$$
$$\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$$
$$\tan\alpha = -\tan(180^\circ - \alpha)$$
$$\cot\alpha = -\cot(180^\circ - \alpha).$$

b) Các hệ thức lượng giác cơ bản

Từ định nghĩa giá trị lượng giác của góc α ta suy ra các hệ thức :

■ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

■ $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha\ (\alpha \neq 90^\circ)$; $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha\ (\alpha \neq 0^\circ\ ;\ 180^\circ)$;

■ $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$; $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$;

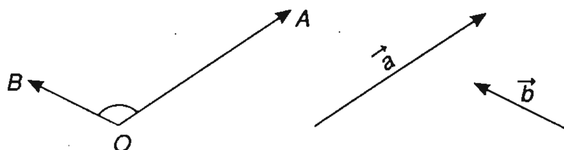
■ $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

3. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

Giá trị lượng giác \ α	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	0
$\cot\alpha$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\parallel$

4. Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0° đến 180° được gọi là *góc giữa hai vectơ* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ (h.2.2) và kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$.



Hình 2.2

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN



VẤN ĐỀ 1

Tính giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt

1. Phương pháp

• Dựa vào định nghĩa, tìm tung độ y_0 và hoành độ x_0 của điểm M trên nửa đường tròn đơn vị với góc $\widehat{xOM} = \alpha$ và từ đó ta có các giá trị lượng giác :

$$\sin\alpha = y_0 \ ; \ \cos\alpha = x_0 \ ; \ \tan\alpha = \frac{y_0}{x_0} \ ; \ \cot\alpha = \frac{x_0}{y_0}.$$

• Dựa vào tính chất : Hai góc bù nhau có sin bằng nhau và có côsin, tang, côtang đối nhau.

2. Các ví dụ



Ví dụ 1. Cho góc $\alpha = 135^\circ$. Hãy tính $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$.

GIẢI

Ta có $\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 135^\circ) = \sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\cos 135^\circ = -\cos(180^\circ - 135^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ ;$$

$$\tan 135^\circ = \frac{\sin 135^\circ}{\cos 135^\circ} = -1.$$

Do đó $\cot 135^\circ = -1.$

 **Ví dụ 2.** Cho tam giác cân ABC có $\widehat{B} = \widehat{C} = 15^\circ$. Hãy tính các giá trị lượng giác của góc A.

GIẢI

Ta có $\widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$

Vậy $\sin A = \sin(180^\circ - 150^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$;

$\cos A = -\cos(180^\circ - 150^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\tan A = \frac{\sin 150^\circ}{\cos 150^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$

Do đó $\cot A = -\sqrt{3}.$



VẤN ĐỀ 2

Chứng minh các hệ thức về giá trị lượng giác

1. Phương pháp

- Dựa vào định nghĩa giá trị lượng giác của một góc α ($0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$).
- Dựa vào tính chất của tổng ba góc của một tam giác bằng 180°.
- Sử dụng các hệ thức $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$; $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$.

2. Các ví dụ

 **Ví dụ 1.** Cho góc α bất kì. Chứng minh rằng $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = 2\sin^2\alpha - 1$.

GIẢI

Cách 1. Ta có $\cos^4\alpha = (\cos^2\alpha)^2 = (1 - \sin^2\alpha)^2 = 1 - 2\sin^2\alpha + \sin^4\alpha$.

Do đó $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = 2\sin^2\alpha - 1$.

Cách 2. Ta biết rằng $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)$

$$= 1.\,[\sin^2\alpha - (1 - \sin^2\alpha)]$$

$$= 2\sin^2\alpha - 1.$$

Cách 3. Ta có thể sử dụng phép biến đổi tương đương như sau :

$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = 2\sin^2\alpha - 1$ (*)

$\Leftrightarrow \sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha + 1 - \cos^4\alpha = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \sin^2\alpha)^2 - \cos^4\alpha = 0$

$\Leftrightarrow \cos^4\alpha - \cos^4\alpha = 0$.

Vì hệ thức cuối cùng luôn luôn đúng nên hệ thức (*) đúng.



Ví dụ 2. Chứng minh rằng :

a) $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ (với $\alpha \neq 90^\circ$) ;

b) $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ (với $\alpha \neq 0^\circ$; 180°).

GIẢI

a) $1 + \tan^2\alpha = 1 + \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

b) $1 + \cot^2\alpha = 1 + \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.



Ví dụ 3. Cho tam giác *ABC*. Chứng minh rằng :

a) $\sin A = \sin(B + C)$;

b) $\cos\dfrac{A}{2} = \sin\dfrac{B + C}{2}$;

c) $\tan A = -\tan(B + C)$.

GIẢI

Vì $180^o - \widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C}$ nên ta có :

a) $\sin A = \sin(180^o - A) = \sin(B + C)$;

b) $\cos\frac{A}{2} = \sin\frac{B+C}{2}$ vì $\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2} = 90^o$ (hai góc phụ nhau) ;

c) $\tan A = -\tan(180^o - A) = -\tan(B + C)$.



Vấn đề 3

Cho biết một giá trị lượng giác của góc α, tìm các giá trị lượng giác còn lại của α

1. Phương pháp

Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của góc α và các hệ thức cơ bản liên hệ giữa các giá trị đó như :

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

2. Các ví dụ



Ví dụ 1. Cho biết $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, hãy tính $\sin\alpha$ và $\tan\alpha$.

GIẢI

Vì $\cos\alpha < 0$ nên $90^o < \alpha < 180^o$. Suy ra $\sin\alpha > 0$ và $\tan\alpha < 0$.

Vì $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ nên thay giá trị $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ vào ta có :

$$\sin^2\alpha + \frac{4}{9} = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{5}{9}.$$

Vậy $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

 **Ví dụ 2.** Cho góc α, biết $0^o < \alpha < 90^o$ và $\tan\alpha = 2$.

Tính $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$.

GIẢI

Theo giả thiết ta có : $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2$. Do đó $\sin\alpha = 2\cos\alpha$. (1)

Mặt khác ta lại có : $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. (2)

Thay (1) vào (2) ta có : $4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\Leftrightarrow 5\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{5}.$$

Vì $0^o < \alpha < 90^o$ nên $\cos\alpha > 0$, do đó $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, mà $\sin\alpha = 2\cos\alpha$ nên ta có $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

 **Ví dụ 3.** Cho góc α, biết $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Hãy tính $\sin\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$.

GIẢI

Ta có $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{4}{5}$ (vì $\sin\alpha > 0$)

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{4}{3}.$$ Do đó $\cot\alpha = \frac{3}{4}$.

 **Ví dụ 4.** Cho góc α biết $\tan\alpha = -2$. Tính $\cos\alpha$ và $\sin\alpha$.

GIẢI

Vì $\tan\alpha = -2 < 0$ nên $90^o < \alpha < 180^o$, suy ra $\cos\alpha < 0$.

Vì $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ nên $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{1}{1+4} = \dfrac{1}{5}$.

Vậy $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Mặt khác $\sin\alpha = \cos\alpha.\tan\alpha = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right).(-2) = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Nhận xét. Có thể dùng hệ thức $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ để tính $\sin\alpha$ như sau :

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Do đó $\quad \sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ (vì $\sin\alpha > 0$).



VẤN ĐỀ 4

Cho biết một giá trị lượng giác của góc α, hãy xác định góc α đó

1. Phương pháp

Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của góc α để dựng góc α và trong một số trường hợp có thể sử dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn để dựng góc α.

Tập sử dụng máy tính bỏ túi để xác định góc α.

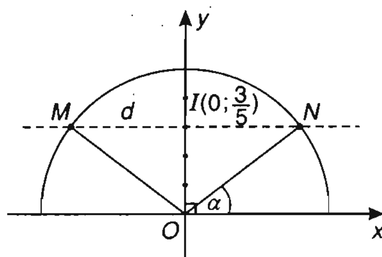
2. Các ví dụ



Ví dụ 1. Xác định góc nhọn α biết $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$.

GIẢI

Cách 1. Trên trục Oy của nửa đường tròn đơn vị ta lấy điểm $I = \left(0\,;\,\dfrac{3}{5}\right)$ và qua đó vẽ đường thẳng d song song với trục Ox (h.2.3).

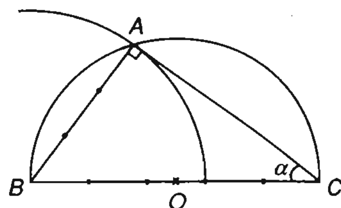


Hình 2.3

Đường thẳng này cắt nửa đường tròn đơn vị tại hai điểm M và N trong đó $\widehat{xOM}$ là góc tù và $\widehat{xON}$ là góc nhọn. Ta xác định được góc $\alpha = \widehat{xON}$ có $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

Cách 2. Ta dựng tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 3$, $BC = 5$ (h.2.4).

Ta có $\alpha = \widehat{ACB}$ vì $\sin\widehat{ACB} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$.



Hình 2.4

Cách 3. Dùng máy tính bỏ túi (Casio fx-500MS).

• Chọn đơn vị đo : Sau khi mở máy ấn phím MODE nhiều lần để màn hình hiện lên dòng chữ ứng với các số sau đây :

Deg	Rad	Gra
1	2	3

Sau đó ấn phím 1 để xác định đơn vị đo góc là độ.

• Ta tính $\sin\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$:

Ấn liên tiếp các phím sau đây :



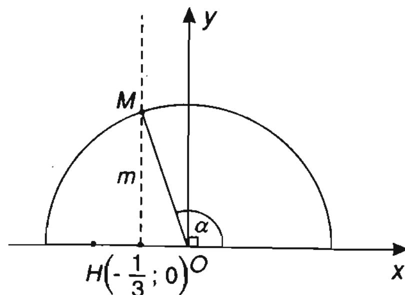
Ta được kết quả là : $\alpha \approx 36^\circ 52' 11''$.



Ví dụ 2. Xác định góc α biết rằng $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$.

GIẢI

Cách 1. Trên trục Ox của nửa đường tròn đơn vị ta lấy điểm $H = \left(-\frac{1}{3}\,;0\right)$ và qua đó vẽ đường thẳng m song song với trục Oy (h.2.5). Đường thẳng này cắt nửa đường tròn đơn vị tại M. Ta có góc $\alpha = \widehat{xOM}$.



Hình 2.5

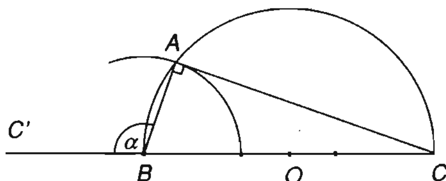
Cách 2. Ta biết rằng $\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$.

Theo giả thiết $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, vậy $\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{3}$.

Ta dựng tam giác ABC vuông tại A có $AB = 1$, $BC = 3$ (h.2.6).

Ta có $\cos\widehat{ABC} = \frac{1}{3}$ nên $\cos(180^\circ - \widehat{ABC}) = -\frac{1}{3}$.

Vậy $\alpha = 180^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{ABC'}$ (tia BC' ngược hướng với tia BC).



Hình 2.6

Cách 3. Dùng máy tính bỏ túi (Casio fx–500MS)

Tương tự như tính $\sin\alpha$.

Vì $\cos\alpha < 0$ nên α là góc tù.

Ấn liên tiếp các phím sau đây :



Ta được kết quả là : $\alpha \approx 109^\circ28'16''$.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

2.1. Với những giá trị nào của góc α $(0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$ thì :

a) $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ cùng dấu ?

b) $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ khác dấu ?

c) $\sin\alpha$ và $\tan\alpha$ cùng dấu ?

d) $\sin\alpha$ và $\tan\alpha$ khác dấu ?

2.2. Tính giá trị lượng giác của các góc sau đây :

a) 120° ; b) 150° ; c) 135°.

2.3. Tính giá trị của biểu thức :

a) $2\sin 30^\circ + 3\cos 45^\circ - \sin 60^\circ$;

b) $2\cos 30^\circ + 3\sin 45^\circ - \cos 60^\circ$.

2.4. Rút gọn biểu thức :

a) $4a^2\cos^2 60^\circ + 2ab.\cos^2 180^\circ + \dfrac{4}{3}b^2\cos^2 30^\circ$;

b) $(a\sin 90^\circ + b\tan 45^\circ)(a\cos 0^\circ + b\cos 180^\circ)$.

2.5. Hãy tính và so sánh giá trị của từng cặp biểu thức sau đây :

a) $A = \cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ$ và $B = \cos 60^\circ + \sin 45^\circ$;

b) $C = \dfrac{2\tan 30^o}{1-\tan^2 30^o}$ và $D = (-\tan 135^\circ).\tan 60^\circ$.

2.6. Cho $\sin\alpha = \dfrac{1}{4}$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $\cos\alpha$ và $\tan\alpha$.

2.7. Cho $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Tính $\sin\alpha$ và $\tan\alpha$.

2.8. Cho $\tan\alpha = 2\sqrt{2}$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$.

2.9. Biết $\tan\alpha = \sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{3\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$.

2.10. Biết $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $B = \dfrac{\cot\alpha - \tan\alpha}{\cot\alpha + \tan\alpha}$.

2.11. Chứng minh rằng với $0^\circ \le x \le 180^\circ$ ta có :

a) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x\cos x$;

b) $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x\cos x$;

c) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$.

2.12. Chứng minh rằng biểu thức sau đây không phụ thuộc vào α :

a) $A = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$;

b) $B = \sin^4\alpha - \cos^4\alpha - 2\sin^2\alpha + 1$.

§2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$. *Tích vô hướng của hai vectơ* $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức sau :

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b}).$$

Lưu ý :

- Với $\vec{a},\ \vec{b} \neq \vec{0}$, ta có :

$$\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

- $\vec{a}^2 = |\vec{a}|.|\vec{a}|\cos 0^{\circ} = |\vec{a}|^2$.

2. Các tính chất của tích vô hướng

Với ba vectơ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có :

$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán) ;

$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối) ;

$$(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}.(k\vec{b})\ ;$$

$$\vec{a}^2 \geq 0\ ;$$

$$\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}.$$

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$$

$$(\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$$

$$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2.$$

3. Biểu thức toạ độ của tích vô hướng

Trong mặt phẳng toạ độ $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1 ; a_2)$, $\vec{b} = (b_1 ; b_2)$.

Khi đó tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ là : $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

4. Ứng dụng của tích vô hướng

a) Tính độ dài của vectơ. Cho $\vec{a} = (a_1 ; a_2)$, khi đó :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

b) Tính góc giữa hai vectơ. Cho $\vec{a} = (a_1 ; a_2)$, $\vec{b} = (b_1 ; b_2)$, khi đó :

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN



VẤN ĐỀ 1

Tính tích vô hướng của hai vectơ

1. Phương pháp

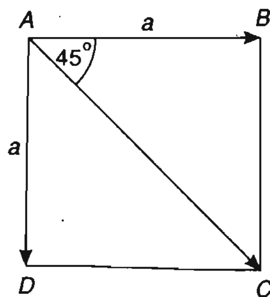
- Áp dụng công thức của định nghĩa : $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})$.
- Dùng tính chất phân phối : $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$.

2. Các ví dụ



Ví dụ 1. Cho hình vuông *ABCD* cạnh *a*.

Tính tích $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.



Hình 2.7

GIẢI

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AD}|.\cos 90^\circ = 0$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|.\cos 45^o$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a.a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = a^2$ (h.2.7).



Ví dụ 2. Tam giác *ABC* vuông tại *C* có $AC = 9$, $CB = 5$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

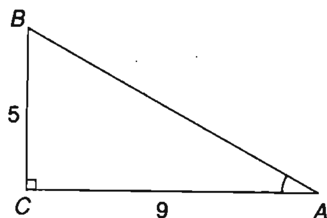
GIẢI

Ta có

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$,

trong đó $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \dfrac{AC}{AB}$

(h.2.8).



Hình 2.8

Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\dfrac{AC}{AB} = AC^2 = 9^2 = 81.$



Ví dụ 3. Tam giác *ABC* có $\widehat{A} = 90^o$, $\widehat{B} = 60^o$ và $AB = a$. Tính :

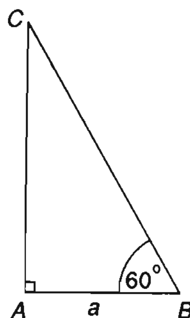
a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$;

b) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$;

c) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$.

GIẢI

Ta có $BC = 2a$, $AC = a\sqrt{3}$ (h.2.9).



Hình 2.9

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|\cos 90^o = 0.$

b) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}|.|\overrightarrow{CB}|\cos 30^o = a\sqrt{3}.2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3a^2.$

c) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{AC}|.|\overrightarrow{CB}|\cos 150^o = a\sqrt{3}.2a.\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3a^2.$



Vấn đề 2

Chứng minh các đẳng thức về vectơ có liên quan đến tích vô hướng

1. Phương pháp

- Sử dụng tính chất phân phối của tích vô hướng đối với phép cộng các vectơ.
- Dùng quy tắc ba điểm $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ hay quy tắc hiệu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

2. Các ví dụ



Ví dụ 1. Cho tam giác *ABC*. Chứng minh rằng với điểm *M* tuỳ ý ta có

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}=0.$$

GIẢI

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB})=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ (1)

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{MB}.(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC})=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$ (2)

$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MC}.(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA})=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ (3)

Cộng các kết quả từ (1), (2), (3) ta được :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}=0.$$



Ví dụ 2. Cho *O* là trung điểm của đoạn thẳng *AB* và *M* là một điểm tuỳ ý. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=OM^2-OA^2$.

GIẢI

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})$

$$=\overrightarrow{MO}^2+\overrightarrow{MO}.\underbrace{(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})}_{\vec{0}}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{MO}^2-\overrightarrow{OA}^2$$

(vì $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}^2$).

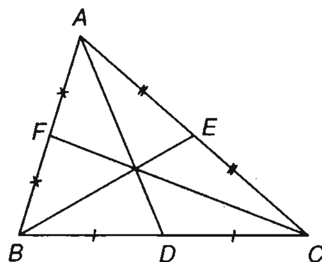
Vậy $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=OM^2-OA^2$ (vì $\overrightarrow{OA}^2=OA^2$, $\overrightarrow{MO}^2=OM^2$).

 **Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC với ba trung tuyến là AD, BE, CF.

Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF}=0$.

GIẢI

Ta có $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ (h.2.10).



Hình 2.10

Do đó $2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}.(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}$. (1)

Tương tự $2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA}$ (2)

$2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$. (3)

Từ (1), (2), (3) ta suy ra

$$2(\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF})=0$$

hay $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF}=0$.



VẤN ĐỀ 3

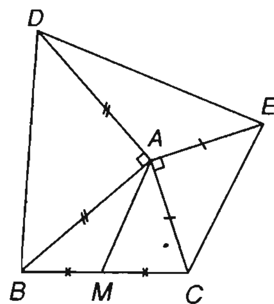
Chứng minh sự vuông góc của hai vectơ

1. Phương pháp

Sử dụng tính chất của tích vô hướng : $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$.

2. Các ví dụ

 **Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Vẽ bên ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng AM vuông góc với DE.



Hình 2.11

GIẢI

Ta chứng minh $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DE}=0$ (h.2.11).

Ta có

$$2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})$$
$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$$
$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$$
$$= AB.AE.\cos(90^o+A)-AC.AD\cos(90^o+A)$$
$$=0$$

(vì $AB = AD$, $AE = AC$).

Vậy $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{DE}$ suy ra AM vuông góc với DE.



Ví dụ 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{2}$.

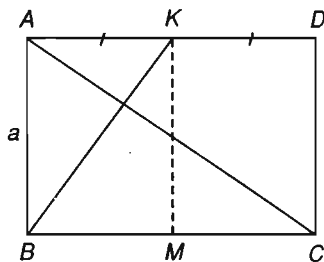
Gọi K là trung điểm của cạnh AD. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BK}$ vuông góc với $\overrightarrow{AC}$.

GIẢI

Gọi M là trung điểm của cạnh BC.

Ta có $AB = a$, $AC = BD = \sqrt{2a^2+a^2} = a\sqrt{3}$.

Cần chứng minh $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = 0$ (h.2.12).



Hình 2.12

Ta có $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Vậy $$\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$$
$$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}$$
$$= -a^2+0+0+\frac{1}{2}(a\sqrt{2})^2 = 0.$$

Do đó $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = 0$. Ta có $\overrightarrow{BK}$ vuông góc với $\overrightarrow{AC}$.



VẤN ĐỀ 4

Biểu thức toạ độ của tích vô hướng và các ứng dụng : tính độ dài của một vectơ, tính khoảng cách giữa hai điểm, tính góc giữa hai vectơ

1. Phương pháp

- Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1 ; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1 ; b_2)$. Ta có $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.
- Cho vectơ $\vec{u} = (u_1 ; u_2)$. Ta có $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.
- Cho hai điểm $A = (x_A ; y_A)$, $B = (x_B ; y_B)$.

  Ta có $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1 ; b_2)$:

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

2. Các ví dụ



Ví dụ 1. Trong mặt phẳng *Oxy* cho $A = (4 ; 6)$, $B = (1 ; 4)$, $C = \left(7 ; \frac{3}{2}\right)$.

a) Chứng minh rằng tam giác *ABC* vuông tại *A*.

b) Tính độ dài các cạnh *AB*, *AC* và *BC* của tam giác đó.

GIẢI

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3 ; -2)$, $\overrightarrow{AC} = \left(3 ; -\frac{9}{2}\right)$ và

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-3).3 + (-2).\left(-\frac{9}{2}\right) = 0.$$

Vậy $\overrightarrow{AB}$ vuông góc với $\overrightarrow{AC}$ và tam giác *ABC* vuông tại *A*.

b) $$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13},$$

$$AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9 + \frac{81}{4}} = \frac{\sqrt{117}}{2}.$$

Ta có $\overrightarrow{BC} = \left(6 ; -\frac{5}{2}\right)$ và

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{36 + \frac{25}{4}} = \frac{13}{2}.$$

Nhận xét. Có thể chứng minh tam giác *ABC* vuông tại *A* bằng cách chứng minh rằng $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

 **Ví dụ 2.** Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong các trường hợp sau :

a) $\vec{a} = (1\ ; -2)$, $\vec{b} = (-1\ ; -3)$;

b) $\vec{a} = (3\ ; -4)$, $\vec{b} = (4\ ; 3)$;

c) $\vec{a} = (2\ ; 5)$, $\vec{b} = (3\ ; -7)$.

GIẢI

a) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{1.(-1)+(-2).(-3)}{\sqrt{1+4}.\sqrt{1+9}} = \dfrac{5}{\sqrt{50}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$.

b) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{3.4+(-4).3}{\sqrt{9+16}.\sqrt{16+9}} = \dfrac{0}{25} = 0$.

Vậy $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

c) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{2.3+5.(-7)}{\sqrt{4+25}.\sqrt{9+49}} = \dfrac{-29}{29\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$.

 **Ví dụ 3.** Trong mặt phẳng *Oxy* cho hai điểm $A(2\ ; 4)$ và $B(1\ ; 1)$. Tìm toạ độ điểm C sao cho tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B.

GIẢI

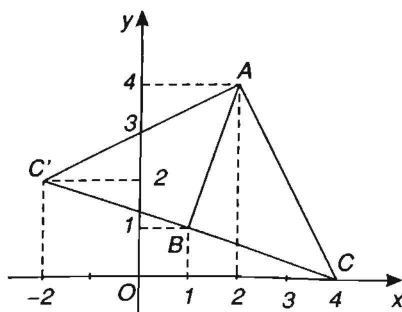
Giả sử điểm C cần tìm có toạ độ là $(x\ ; y)$. Để ΔABC vuông cân tại B ta phải có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}| \end{cases}$$

với $\overrightarrow{BA} = (1\ ; 3)$ và $\overrightarrow{BC}\ (x-1\ ; y-1)$.

Điều đó có nghĩa là :

$$\begin{cases} 1.(x-1)+3.(y-1) = 0 \\ 1^2+3^2 = (x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$$



Hình 2.13

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 3y \\ (3 - 3y)^2 + (y - 1)^2 = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 3y \\ 10y^2 - 20y = 0. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta tìm được toạ độ hai điểm C và C' thoả mãn điều kiện của bài toán :

$C = (4 ; 0)$ và $C' = (-2 ; 2)$ (h.2.13).

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

2.13. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ khi nào dương, khi nào âm và khi nào bằng 0 ?

2.14. Áp dụng tính chất giao hoán và tính chất phân phối của tích vô hướng hãy chứng minh các kết quả sau đây :

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}.\vec{b} \ ;$$

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}.\vec{b} \ ;$$

$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 .$$

2.15. Tam giác ABC vuông cân tại A và có $AB = AC = a$. Tính :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

2.16. Cho tam giác ABC có $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm, $CA = 8$ cm.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ rồi suy ra giá trị của góc A ;

b) Tính $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

2.17. Tam giác ABC có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 11$ cm.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và chứng tỏ rằng tam giác ABC có góc A tù.

b) Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $AM = 2$ cm và gọi N là trung điểm của cạnh AC. Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}$.

2.18. Cho tam giác ABC cân ($AB = AC$). Gọi H là trung điểm của cạnh BC, D là hình chiếu vuông góc của H trên cạnh AC, M là trung điểm của đoạn HD. Chứng minh rằng AM vuông góc với BD.

2.19. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$ và $|\vec{a}+\vec{b}| = 13$. Tính tích vô hướng $\vec{a}.(\vec{a}+\vec{b})$ và suy ra góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{a} + \vec{b}$.

2.20. Cho tam giác ABC. Gọi H là trực tâm của tam giác và M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$.

2.21. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

2.22. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau và cắt nhau tại M. Gọi P là trung điểm của cạnh AD. Chứng minh rằng MP vuông góc với BC khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$.

2.23. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC với $A = (2 ; 4)$, $B = (-3 ; 1)$ và $C = (3 ; -1)$. Tính :

a) Toạ độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành ;

b) Toạ độ chân A' của đường cao vẽ từ đỉnh A.

2.24. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC với $A = (-1 ; 1)$, $B = (1 ; 3)$ và $C = (1 ; -1)$. Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A.

2.25. Trong mặt phẳng Oxy cho bốn điểm $A(-1 ; 1)$, $B(0 ; 2)$, $C(3 ; 1)$ và $D(0 ; -2)$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.

2.26. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(-1 ; -1)$, $B(3 ; 1)$ và $C(6 ; 0)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Tính góc B của tam giác ABC.

2.27. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(5 ; 4)$ và $B(3 ; -2)$. Một điểm M di động trên trục hoành Ox. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$.

2.28. Trong mặt phẳng Oxy cho bốn điểm $A(3 ; 4)$, $B(4 ; 1)$, $C(2 ; -3)$, $D(-1 ; 6)$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn.

§3. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

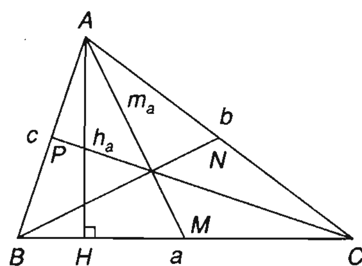
Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, đường cao $AH = h_a$ và các đường trung tuyến $AM = m_a$, $BN = m_b$, $CP = m_c$ (h.2.14).

1. Định lí côsin

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$



Hình 2.14

Hệ quả :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

2. Định lí sin

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

3. Độ dài đường trung tuyến của tam giác

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4};$$

$$m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4};$$

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}.$$

4. Các công thức tính diện tích tam giác

Diện tích S của tam giác ABC được tính theo các công thức :

- $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$ với h_a, h_b, h_c lần lượt là các đường cao của tam giác ABC ;
- $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B$;
- $S = \frac{abc}{4R}$ với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ;
- $S = pr$ với $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC ;
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ (công thức Hê-rông).

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN



VẤN ĐỀ 1

Tính một số yếu tố trong tam giác theo một số yếu tố cho trước (trong đó có ít nhất là một cạnh)

1. Phương pháp

- Sử dụng trực tiếp định lí côsin và định lí sin.
- Chọn các hệ thức lượng thích hợp đối với tam giác để tính một số yếu tố trung gian cần thiết để việc giải toán thuận lợi hơn.

2. Các ví dụ



Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $b = 7$ cm, $c = 5$ cm và $\cos A = \frac{3}{5}$.

a) Tính a, $\sin A$ và diện tích S của tam giác ABC.

b) Tính đường cao h_a xuất phát từ đỉnh A và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

GIẢI

a) Theo định lí côsin ta có :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 7^2 + 5^2 - 2.7.5.\frac{3}{5} = 32 \quad \Rightarrow a = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \quad \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5} \text{ (vì } \sin A > 0).$$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}.7.5.\frac{4}{5} = 14 \text{ (cm}^2).$$

b) $$h_a = \frac{2.S}{a} = \frac{28}{4\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2} \text{ (cm)}.$$

Theo định lí sin : $\dfrac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{a}{2\sin A} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2.\frac{4}{5}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ (cm).



Ví dụ 2. Cho tam giác *ABC* biết $\widehat{A} = 60^\circ$, $b = 8$ cm, $c = 5$ cm.

Tính đường cao h_a và bán kính *R* của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.

GIẢI

Theo định lí côsin ta có : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$$= 8^2 + 5^2 - 2.8.5.\cos 60^\circ = 49.$$

Vậy $a = 7$ (cm).

Theo công thức tính diện tích tam giác $S = \dfrac{1}{2}\, bc\sin A$, ta có :

$$S = \frac{1}{2}.8.5.\sin 60^\circ = \frac{1}{2}.8.5.\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ (cm}^2).$$

Mặt khác $\quad S = \dfrac{1}{2}a.h_a \Rightarrow h_a = \dfrac{2S}{a} = \dfrac{20\sqrt{3}}{7}$ (cm).

Từ công thức $S = \dfrac{abc}{4R}$ ta có $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{7.8.5}{40\sqrt{3}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$ (cm).

 **Ví dụ 3.** Tam giác ABC có $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm, $CA = 8$ cm.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$;

b) Tính góc A.

GIẢI

a) Ta có $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$.

Do đó $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{BC}^2\right) = \frac{1}{2}(5^2 + 8^2 - 7^2) = 20.$

Vậy $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 20.$

b) Theo định nghĩa : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}| \cos A$. Ta có :

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|} = \frac{20}{5.8} = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\widehat{A} = 60^\circ$.

 **Ví dụ 4.** Cho tam giác ABC biết $a = 21$ cm, $b = 17$ cm, $c = 10$ cm.

a) Tính diện tích S của tam giác ABC và chiều cao h_a.

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp r của tam giác.

c) Tính độ dài đường trung tuyến m_a phát xuất từ đỉnh A của tam giác.

GIẢI

a) Ta có $p = \frac{21+17+10}{2} = 24$ (cm).

Theo công thức Hê-rông ta có

$$S = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} = 84 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Do đó $h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2.84}{21} = 8$ (cm).

b) Ta có $S = p.r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{84}{24} = 3{,}5$ (cm).

c) Độ dài đường trung tuyến m_a được tính theo công thức :

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

Do đó $m_a^2 = \frac{17^2 + 10^2}{2} - \frac{21^2}{4} = \frac{337}{4} = 84{,}25$

$\Rightarrow m_a = \sqrt{84{,}25} \approx 9{,}18$ (cm).



Ví dụ 5. Cho tam giác *ABC* biết $a = \sqrt{6}$ cm, $b = 2$ cm, $c = (1 + \sqrt{3})$ cm. Tính các góc *A*, *B*, chiều cao h_a và bán kính đường tròn ngoại tiếp *R* của tam giác *ABC*.

GIẢI

Theo định lí côsin ta có : $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4 + (1+\sqrt{3})^2 - 6}{4.(1+\sqrt{3})} = \frac{1}{2}$.

Vậy $\widehat{A} = 60^\circ$.

Tương tự, $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = \frac{(1+\sqrt{3})^2 + 6 - 4}{2.\sqrt{6}.(1+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\widehat{B} = 45^\circ$.

Ta có $\sin B = \frac{h_a}{c} \Rightarrow h_a = c.\sin B = (1+\sqrt{3}).\sin 45^\circ = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{2}$ (cm).

Áp dụng định lí sin : $\frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow R = \frac{b}{2\sin B} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ (cm).



VẤN ĐỀ 2

Chứng minh các hệ thức về mối quan hệ giữa các yếu tố của một tam giác

1. Phương pháp

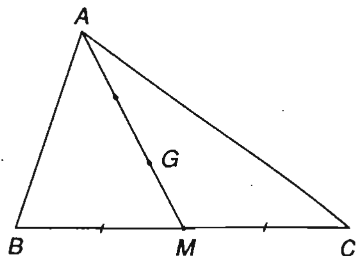
Dùng các hệ thức cơ bản để biến đổi vế này thành vế kia hoặc chứng minh cả hai vế cùng bằng một biểu thức nào đó, hoặc chứng minh hệ thức cần chứng minh tương đương với một hệ thức đã biết là đúng. Khi chứng minh cần khai thác các giả thiết và kết luận để tìm được các hệ thức thích hợp làm trung gian cho quá trình biến đổi.

2. *Các ví dụ*



Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Chứng minh rằng :

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$



Hình 2.15

GIẢI

Theo tính chất của trọng tâm ta có $GA = \frac{2}{3}AM \Rightarrow GA^2 = \frac{4}{9}AM^2$ (h.2.15).

Áp dụng công thức tính trung tuyến của một tam giác ta có :

$$AM^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(c^2 + b^2 - \frac{a^2}{2}\right)$$

$$GA^2 = \frac{4}{9}AM^2 = \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}\left(c^2 + b^2 - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{2}{9}\left(b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}\right).$$

Tương tự, $GB^2 = \frac{2}{9}\left(a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}\right)$

$$GC^2 = \frac{2}{9}\left(a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}\right).$$

Do đó $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{2}{9}\left[\frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2)\right] = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$



Ví dụ 2. Tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh rằng :

$$a = b\cos C + c\cos B.$$

GIẢI

Theo định lí côsin ta có $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$.

$$\Rightarrow c\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \qquad (1)$$

Ta lại có $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Rightarrow b\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$ (2)

Cộng từng vế của (1) và (2) ta có : $b\cos C + c\cos B = \dfrac{2a^2}{2a} = a.$



Ví dụ 3. Tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và đường trung tuyến $AM = c = AB$. Chứng minh rằng :

a) $a^2 = 2(b^2 - c^2)$;

b) $\sin^2 A = 2(\sin^2 B - \sin^2 C)$.

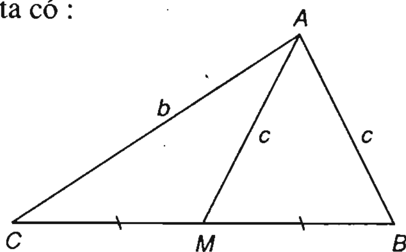
GIẢI

(Xem h.2.16)

a) Theo định lí về trung tuyến của tam giác ta có :

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AM^2 = \frac{a^2}{2} + 2c^2$$

$$\Rightarrow a^2 = 2(b^2 - c^2).$$



Hình 2.16

b) Theo định lí sin ta có :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{b^2}{\sin^2 B} = \frac{c^2}{\sin^2 C} = \frac{b^2 - c^2}{\sin^2 B - \sin^2 C}. \quad (*)$$

Thay $a^2 = 2(b^2 - c^2)$ vào (*) ta có :

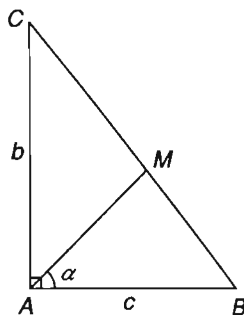
$$\frac{2(b^2 - c^2)}{\sin^2 A} = \frac{b^2 - c^2}{\sin^2 B - \sin^2 C} \Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 A} = \frac{1}{\sin^2 B - \sin^2 C}$$

$$\Rightarrow \sin^2 A = 2(\sin^2 B - \sin^2 C).$$

 **Ví dụ 4.** Tam giác ABC vuông tại A có các cạnh góc vuông là b và c. Lấy một điểm M trên cạnh BC và cho $\widehat{BAM} = \alpha$. Chứng minh rằng :

$$AM = \frac{bc}{b\cos\alpha + c\sin\alpha}.$$

GIẢI



Hình 2.17

$$S_{ABC} = S_{MAB} + S_{MAC}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}AM.c.\sin\alpha + \frac{1}{2}AM.b.\sin(90^\circ - \alpha)$$

hay $bc = AM(c\sin\alpha + b\cos\alpha)$ (h.2.17).

Vậy $AM = \dfrac{bc}{b\cos\alpha + c\sin\alpha}$.



VẤN ĐỀ 3

Giải tam giác

1. Phương pháp

Một tam giác thường được xác định khi biết ba yếu tố. Trong các bài toán giải tam giác, người ta thường cho tam giác với ba yếu tố như sau :

– Biết một cạnh và hai góc kề cạnh đó (g, c, g) ;

– Biết một góc và hai cạnh kề góc đó (c, g, c) ;

– Biết ba cạnh (c, c, c).

Để tìm các yếu tố còn lại của tam giác người ta thường sử dụng các định lí côsin, định lí sin, định lí tổng ba góc của một tam giác bằng 180° và đặc biệt có thể sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông.

2. Các ví dụ

 **Ví dụ 1.** Giải tam giác ABC biết $b = 14$, $c = 10$, $\widehat{A} = 145^\circ$.

GIẢI

Ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 14^2 + 10^2 - 2.14.10.\cos 145^o$

$\approx 196 + 100 - 280.(-0,8191) \approx 525,35.$

Vậy $a \approx 23$.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{b.\sin A}{a} = \frac{14.\sin 145^o}{23} \approx 0,34913 \Rightarrow \widehat{B} \approx 20^o26'$$

$\widehat{C} = 180^o - (\widehat{A} + \widehat{B}) \approx 180^o - (145^o + 20^o26') = 14^o34'$.

 **Ví dụ 2.** Giải tam giác *ABC* biết *a* = 4, *b* = 5, *c* = 7.

GIẢI

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 7^2 - 4^2}{2.5.7} = \frac{58}{70} \approx 0,8286 \Rightarrow \widehat{A} \approx 34^o3'.$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4^2 + 7^2 - 5^2}{2.4.7} = \frac{40}{56} \approx 0,71428 \Rightarrow \widehat{B} \approx 44^o25'.$$

$\widehat{C} = 180^o - (\widehat{A} + \widehat{B}) \approx 180^o - (34^o3' + 44^o25') = 101^o32'$.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

2.29. Tam giác *ABC* có cạnh $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2$ và $\widehat{C} = 30^o$.

a) Tính cạnh *c*, góc *A* và diện tích *S* của tam giác *ABC* ;

b) Tính chiều cao h_a và đường trung tuyến m_a của tam giác *ABC*.

2.30. Tính góc lớn nhất của tam giác *ABC* biết *a* = 3, *b* = 4, *c* = 6. Tính đường cao ứng với cạnh lớn nhất của tam giác.

2.31. Tam giác *ABC* có $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Tính các góc *A*, *B* và các độ dài h_a, *R*, *r* của tam giác đó.

2.32. Tam giác *ABC* có $a = 4\sqrt{7}$ cm, *b* = 6 cm, *c* = 8 cm. Tính diện tích *S*, đường cao h_a và bán kính *R* của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

2.33. Gọi m_a, m_b, m_c là các trung tuyến lần lượt ứng với các cạnh a, b, c của tam giác ABC.

a) Tính m_a, biết rằng $a = 26$, $b = 18$, $c = 16$.

b) Chứng minh rằng : $4\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

2.34. Tam giác ABC có $b + c = 2a$. Chứng minh rằng :

a) $2\sin A = \sin B + \sin C$; b) $\dfrac{2}{h_a} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$.

2.35. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có các hệ thức :

a) $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$;

b) $h_a = 2R \sin B \sin C$.

2.36. Tam giác ABC có $bc = a^2$. Chứng minh rằng :

a) $\sin^2 A = \sin B . \sin C$;

b) $h_b . h_c = h_a^2$.

2.37. Chứng minh rằng diện tích hình bình hành bằng tích hai cạnh liên tiếp với sin của góc xen giữa chúng.

2.38. Cho hình tứ giác lồi $ABCD$ có đường chéo $AC = x$, đường chéo $BD = y$ và góc tạo bởi AC và BD là α. Gọi S là diện tích của tứ giác $ABCD$.

a) Chứng minh rằng $S = \dfrac{1}{2} x.y.\sin\alpha$;

b) Nêu kết quả trong trường hợp AC vuông góc với BD.

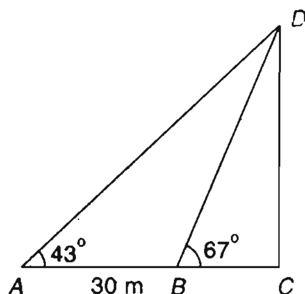
2.39. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Dựng hình bình hành $ABDC'$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ và tam giác ACC' có diện tích bằng nhau.

2.40. Cho tam giác ABC biết $c = 35$cm, $\widehat{A} = 40^\circ$, $\widehat{C} = 120^\circ$. Tính a, b, $\widehat{B}$.

2.41. Cho tam giác ABC biết $a = 7$cm, $b = 23$cm, $\widehat{C} = 130^\circ$. Tính c, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$.

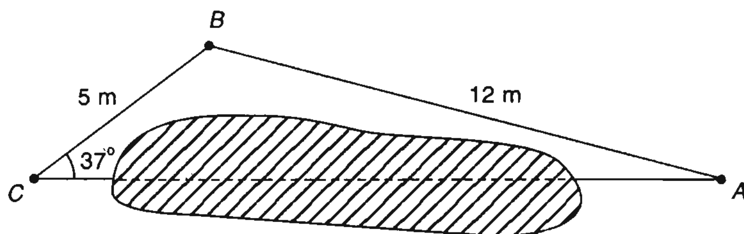
2.42. Cho tam giác ABC biết $a = 14$ cm, $b = 18$ cm, $c = 20$ cm. Tính $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.

2.43. Giả sử chúng ta cần đo chiều cao CD của một cái tháp với C là chân tháp, D là đỉnh tháp. Vì không thể đến chân tháp được nên từ hai điểm A, B có khoảng cách $AB = 30$ m sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng người ta đo được các góc $\widehat{CAD} = 43^\circ$, $\widehat{CBD} = 67^\circ$ (h.2.18). Hãy tính chiều cao CD của tháp.



Hình 2.18

2.44. Khoảng cách từ A đến C không thể đo trực tiếp vì phải qua một đầm lầy nên người ta làm như sau : Xác định một điểm B có khoảng cách $AB = 12$ m và đo được góc $\widehat{ACB} = 37^\circ$ (h.2.19). Hãy tính khoảng cách AC biết rằng $BC = 5$ m.



Hình 2.19

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II

2.45. Cho tam giác ABC thoả mãn điều kiện $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$. Vậy tam giác ABC là tam giác gì ?

2.46. Ba điểm A, B, C phân biệt tạo nên vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ vuông góc với vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$. Vậy tam giác ABC là tam giác gì ?

2.47. Tính các cạnh còn lại của tam giác ABC trong mỗi trường hợp sau :

a) $a = 7$, $b = 10$, $\widehat{C} = 56^\circ 29'$;

b) $a = 2$, $c = 3$, $\widehat{B} = 123^\circ 17'$;

c) $b = 0.4$, $c = 12$, $\widehat{A} = 23^\circ 28'$.

2.48. Tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^o$, $\widehat{C} = 45^o$, $BC = a$. Tính độ dài hai cạnh AB và AC.

2.49. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^o$, $b = 20$, $c = 35$.

a) Tính chiều cao h_a ;

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ;

c) Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

2.50. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh rằng $b^2 - c^2 = a(b\cos C - c\cos B)$.

2.51. Tam giác ABC có $BC = 12$, $CA = 13$, trung tuyến $AM = 8$.

a) Tính diện tích tam giác ABC ;

b) Tính góc B.

2.52. Giải tam giác ABC biết : $a = 14$; $b = 18$; $c = 20$.

2.53. Giải tam giác ABC biết : $\widehat{A} = 60^o$; $\widehat{B} = 40^o$; $c = 14$.

2.54. Cho tam giác ABC có $a = 49{,}4$; $b = 26{,}4$; $\widehat{C} = 47^o20'$. Tính $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ và cạnh c.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

2.55. Tam giác ABC có $AB = 2$ cm, $AC = 1$ cm, $\widehat{A} = 60^o$. Khi đó độ dài cạnh BC là :

(A) 1 cm ; (B) 2cm ;

(C) $\sqrt{3}$ cm ; (D) $\sqrt{5}$ cm.

2.56. Tam giác ABC có $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $c = 5$ cm. Khi đó số đo của góc $\widehat{BAC}$ là :

(A) $\widehat{A} = 45^o$; (B) $\widehat{A} = 30^o$;

(C) $\widehat{A} > 60^o$; (D) $\widehat{A} = 90^o$.

2.57. Tam giác ABC có $AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm, $CA = 6$ cm. Đường trung tuyến AM của tam giác đó có độ dài bằng:

(A) 4 cm ; (B) 5 cm ;

(C) 6 cm ; (D) 7 cm.

2.58. Tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm. Đường tròn nội tiếp tam giác đó có bán kính r bằng :

(A) 1 cm ; (B) $\sqrt{2}$ cm ;

(C) 2 cm ; (D) 3 cm.

2.59. Tam giác ABC có $a = \sqrt{3}$ cm, $b = \sqrt{2}$ cm ; $c = 1$ cm. Đường trung tuyến m_a có độ dài là :

(A) 1 cm ; (B) 1,5 cm ;

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm ; (D) 2,5 cm.

2.60. Tam giác đều nội tiếp đường tròn bán kính $R = 4$ cm có diện tích là :

(A) 13 cm^2 ; (B) $13\sqrt{2}$ cm^2 ;

(C) $12\sqrt{3}$ cm^2 ; (D) 15 cm^2.

2.61. Tam giác ABC vuông và cân tại A có $AB = a$.

Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính r bằng :

(A) $\frac{a}{2}$; (B) $\frac{a}{\sqrt{2}}$;

(C) $\frac{a}{2+\sqrt{2}}$; (D) $\frac{a}{3}$.

2.62. Tam giác ABC có các cạnh a, b, c thoả mãn điều kiện :

$$(a + b + c)(a + b - c) = 3ab.$$

Khi đó số đo của góc C là :

(A) 120^o ; (B) 30^o ;

(C) 45^o ; (D) 60^o.

2.63. Hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAD} = 45^o$.

Khi đó hình bình hành có diện tích bằng :

(A) $2a^2$; (B) $a^2\sqrt{2}$;

(C) a^2 ; (D) $a^2\sqrt{3}$.

2.64. Tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = AC = a$. Đường trung tuyến BM có độ dài là :

(A) $1,5\,a$; (B) $a\sqrt{2}$;

(C) $a\sqrt{3}$; (D) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

2.65. Tam giác đều cạnh a nội tiếp trong đường tròn bán kính R. Khi đó bán kính R bằng :

(A) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; (B) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$;

(C) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; (D) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

2.66. Bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a bằng :

(A) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; (B) $\frac{a\sqrt{2}}{5}$;

(C) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; (D) $\frac{a\sqrt{5}}{7}$.

2.67. Cho tam giác ABC có cạnh $BC = a$, cạnh $CA = b$. Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi góc C bằng :

(A) 60° ; (B) 90° ;

(C) 150° ; (D) 120°.

2.68. Cho tam giác ABC có diện tích S. Nếu tăng độ dài mỗi cạnh BC và AC lên hai lần đồng thời giữ nguyên độ lớn của góc C thì diện tích của tam giác mới được tạo nên là :

(A) $2S$; (B) $3S$;

(C) $4S$; (D) $5S$.

2.69. Cho góc $\widehat{xOy} = 30^\circ$. Gọi A và B là hai điểm di động lần lượt trên Ox và Oy sao cho $AB = 2$. Độ dài lớn nhất của đoạn OB bằng :

(A) 2 ; (B) 3 ;

(C) 4 ; (D) 5.

2.70. Cho hai điểm $A(0 ; 1)$ và $B(3 ; 0)$. Khoảng cách giữa hai điểm A và B là :

(A) 3 ; (B) 4 ;

(C) $\sqrt{5}$; (D) $\sqrt{10}$.

2.71. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(-1 ; 1)$, $B(2 ; 4)$, $C(6 ; 0)$. Khi đó tam giác ABC là tam giác :

(A) Có ba góc nhọn ;

(B) Có một góc vuông ;

(C) Có một góc tù ;

(D) Đều.

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

§1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ TỪ 0° ĐẾN 180°

2.1. a) $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ cùng dấu khi : $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

b) $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ khác dấu khi : $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

c) $\sin\alpha$ và $\tan\alpha$ cùng dấu khi : $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

d) $\sin\alpha$ và $\tan\alpha$ khác dấu khi : $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

2.2. a) $\sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}$; $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$; $\cot 120^\circ = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

b) $\sin 150^\circ = \dfrac{1}{2}$; $\cos 150^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 150^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\cot 150^\circ = -\sqrt{3}$.

c) $\sin 135^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 135^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan 135^\circ = -1$; $\cot 135^\circ = -1$.

2.3. a) $2.\frac{1}{2}+3.\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=1+\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$;

b) $2.\frac{\sqrt{3}}{2}+3.\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-1}{2}$.

2.4. a) $4a^2.\frac{1}{4}+2ab.1+\frac{4}{3}b^2.\frac{3}{4}=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$;

b) $(a.1+b.1)\,(a.1+b.(-1))=(a+b)\,(a-b)=a^2-b^2$.

2.5. a) $A<B$; b) $C=D$.

2.6. $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{4}$; $\tan\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{15}$.

2.7. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{14}}{4}$; $\tan\alpha=-\sqrt{7}$.

2.8. $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

2.9. $A=7-4\sqrt{2}$.

2.10. $B=\frac{1}{9}$.

2.11. a) $(\sin x+\cos x)^2=\sin^2x+\cos^2x+2\sin x\cos x$
$=1+2\sin x\cos x$.

b) $(\sin x-\cos x)^2=\sin^2x+\cos^2x-2\sin x\cos x$
$=1-2\sin x\cos x$.

c) $\sin^4x+\cos^4x=(\sin^2x)^2+(\cos^2x)^2+2\sin^2x\cos^2x-2\sin^2x\cos^2x$
$=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x$
$=1-2\sin^2x\cos^2x$.

2.12. a) $A=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$
$=1+2\sin\alpha\cos\alpha+1-2\sin\alpha\cos\alpha$
$=2$.

b) $B = \sin^4\alpha - \cos^4\alpha - 2\sin^2\alpha + 1$

$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) - 2\sin^2\alpha + 1$

$= 1[\sin^2\alpha - (1 - \sin^2\alpha)] - 2\sin^2\alpha + 1 = 0.$

§2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

2.13. Ta có $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Do đó $\vec{a}.\vec{b} > 0$ khi $\cos(\vec{a},\vec{b}) > 0$ nghĩa là $0 \leq (\vec{a},\vec{b}) < 90^\circ$

$\vec{a}.\vec{b} < 0$ khi $\cos(\vec{a},\vec{b}) < 0$ nghĩa là $90^\circ < (\vec{a},\vec{b}) \leq 180^\circ$

$\vec{a}.\vec{b} = 0$ khi $\cos(\vec{a},\vec{b}) = 0$ nghĩa là $(\vec{a},\vec{b}) = 90^\circ$.

2.14. $(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}.\vec{a} + \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b}$

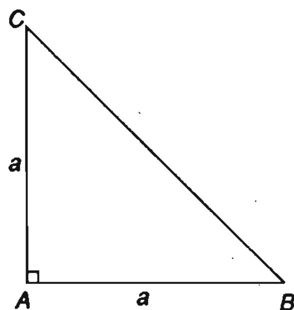
$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}.\vec{b}$

Các tính chất còn lại được chứng minh tương tự.

2.15. a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ (h.2.20).

b) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = a.a\sqrt{2}.\cos 45^\circ = a^2$.

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = a.a\sqrt{2}.\cos 135^\circ = -a^2$.



Hình 2.20

2.16. a) Ta có $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$

$= \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2}{2} = \dfrac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2} = 20.$

Mặt khác $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos A = 5.8.\cos A = 20$,

suy ra $\cos A = \dfrac{20}{40} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 60^\circ$.

b) Ta có $BA^2 = \overrightarrow{BA}^2 = (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB})^2 = \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 - 2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

Do đó $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(CA^2 + CB^2 - BA^2) = \frac{1}{2}(8^2 + 7^2 - 5^2) = 44$.

2.17. a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AC^2 + AB^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(8^2 + 6^2 - 11^2) = -\frac{21}{2}$

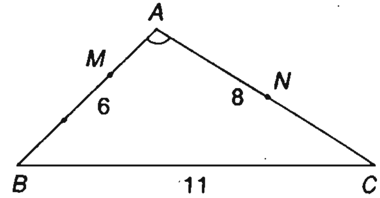
$$= AB.AC.\cos A = -\frac{21}{2} \Rightarrow \text{góc } A \text{ tù.}$$

b) Ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (h.2.21)

Do đó $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$$= \frac{1}{6}.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{6}.\left(-\frac{21}{2}\right) = -\frac{7}{4}.$$



Hình 2.21

2.18. Ta cần chứng minh $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BD} = 0$ (h.2.22).

Ta có $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}$ vì M là trung điểm của đoạn HD.

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HD}$

Do đó $2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HD})$

$$= \underbrace{\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH}}_{=0} + \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH} + \underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{HD}}_{=0}$$

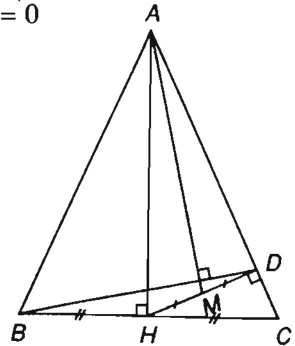
$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH}$$

$$= \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD} + (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}).\overrightarrow{BH}$$

$$= \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD} + \underbrace{\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH}}_{=0} + \overrightarrow{HD}.\overrightarrow{BH}$$

$$= \overrightarrow{HD}.\underbrace{(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH})}_{\overrightarrow{AC}} = \overrightarrow{HD}.\overrightarrow{AC} = 0.$$

Vậy AM vuông góc với BD.



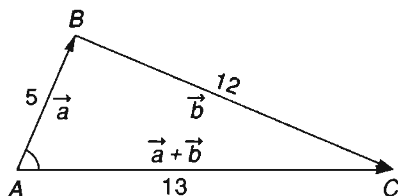
Hình 2.22

2.19. Dựng tam giác ABC có $AB = 5$, $BC = 12$ và $AC = 13$.

Ta có $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 12, |\vec{a}+\vec{b}| = 13$ (h.2.23)

và $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{a}+\vec{b}.$

Khi đó $\vec{a}.(\vec{a}+\vec{b}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.$



Hình 2.23

Mặt khác ta có :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AC^2 + AB^2 - BC^2)$$

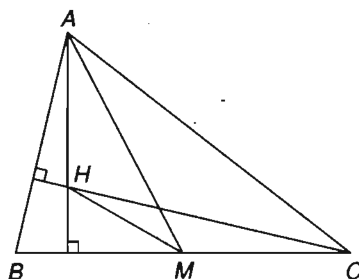
$$= \frac{1}{2}(13^2 + 5^2 - 12^2) = 25.$$

Ta suy ra $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{25}{5.13} \approx 0{,}3846.$

Suy ra $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \approx 67^o23'$.

2.20. Ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ (h.2.24)

$$\overrightarrow{HM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})$$



Hình 2.24

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{HM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HB} + \underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HB}}_{=0} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HC})$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HC})$$

$$= \frac{1}{4}\left[\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BC})\right]$$

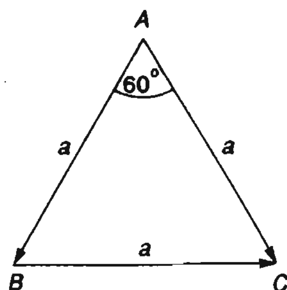
$$= \frac{1}{4}\left[\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}}_{0} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} + \underbrace{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HB}}_{0} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}\right]$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB})$$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}(\underbrace{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}}_{\overrightarrow{CB}}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}^2 = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2.$$

2.21. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a.a.\cos 60^o = \frac{1}{2}a^2$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = a.a.\cos 120^o = -\frac{1}{2}a^2$ (h.2.25).



Hình 2.25

2.22. Ta có

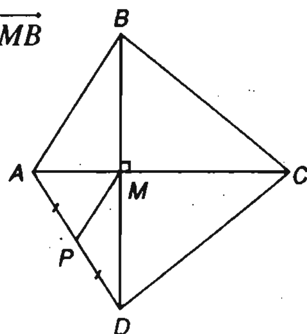
$$2\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}).(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB})$$

$$= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \underbrace{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MC}}_{0} - \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MB}$$

$$= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MB}.$$

Do đó $\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{BC} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MB}$ (h.2.26).



Hình 2.26

2.23. a) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ trong đó

$\overrightarrow{BA} = (5 ; 3)$

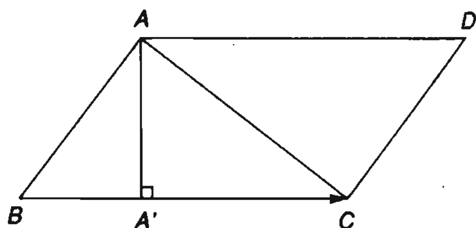
$\overrightarrow{BC} = (6 ; -2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BD} = (11 ; 1)$ (h.2.27).

Giả sử D có toạ độ $(x_D ; y_D)$.

Vì $\overrightarrow{BD} = (11 ; 1)$ và $B(-3 ; 1)$ nên ta có :

$$\begin{cases} x_D + 3 = 11 \\ y_D - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 8 \\ y_D = 2. \end{cases}$$



Hình 2.27

☞ ***Chú ý :*** Ta có thể dựa vào biểu thức vectơ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ hoặc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ để tính toạ độ điểm D.

b) Gọi $A'(x ; y)$ là chân đường cao vẽ từ A ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC} \text{ hay } \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BA'} \text{ cùng phương với } \overrightarrow{BC} \end{cases}$$

với $\overrightarrow{AA'} = (x-2 ; y-4)$, $\overrightarrow{BC} = (6 ; -2)$, $\overrightarrow{BA'} = (x+3 ; y-1)$.

Do đó :

$$\begin{cases} (x-2).6 + (y-4).(-2) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC} \\ -2(x+3) - 6(y-1) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA'} \text{ cùng phương với } \overrightarrow{BC} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 12 - 2y + 8 = 0 \\ -2x - 6 - 6y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y - 4 = 0 \\ -2x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = \dfrac{3}{5} \\ y_{A'} = -\dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

2.24. Ta có $\overrightarrow{AB} = (2 ; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (2 ; -2)$. Do đó :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2.2 + 2(-2) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}.$$

Mặt khác $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$. Vậy tam giác ABC vuông cân tại A.

2.25. Ta có $\overrightarrow{AB} = (1 ; 1)$, $\overrightarrow{DC} = (3 ; 3)$. Vậy $\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{AB}$, ta suy ra DC // AB và $DC = 3AB$.

Mặt khác $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{1^2 + 3^2}$ và $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2 + 1^2}$

nên $ABCD$ là hình thang cân có hai cạnh bên AD và BC bằng nhau, còn hai đáy là AB và CD trong đó đáy lớn CD dài gấp 3 lần đáy nhỏ AB.

2.26. a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (4 ; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (7 ; 1)$.

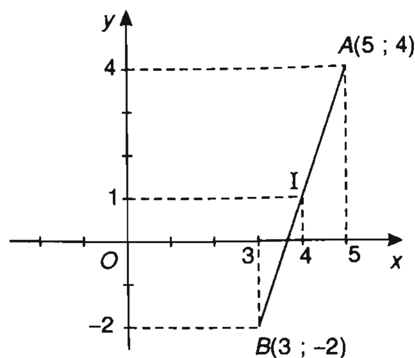
Vì $\dfrac{4}{7} \neq \dfrac{2}{1}$ nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Ta có $\cos B = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|.|\overrightarrow{BC}|}$ với $\overrightarrow{BA} = (-4 ; -2)$, $\overrightarrow{BC} = (3 ; -1)$.

Do đó $\cos B = \dfrac{(-4.3) + (-2)(-1)}{\sqrt{16+4}.\sqrt{9+1}} = \dfrac{-10}{\sqrt{200}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\widehat{B} = 135^\circ$.

2.27. Gọi I là trung điểm của đoạn AB, ta có $I(4\ ;\ 1)$ (h.2.28).



Hình 2.28

Vì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ nên $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=2\left|\overrightarrow{MI}\right|$ nhỏ nhất khi giá trị của đoạn IM nhỏ nhất. Điểm M chạy trên trục Ox nên có toạ độ dạng $M(x\ ;\ 0)$. Do đó :

$\left|\overrightarrow{IM}\right|=\sqrt{(x-4)^2+1}\geq 1.$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 4$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ là 2 khi M có toạ độ là $M(4\ ;\ 0)$.

2.28. Muốn chứng minh tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn, ta chứng minh tứ giác này có hai góc đối bù nhau. Khi đó hai góc này có côsin đối nhau.

Theo giả thiết ta có :

$$\overrightarrow{AB}=(1\ ;-3)\ ;\ \overrightarrow{AD}=(-4\ ;\ 2)\ ;\ \overrightarrow{CB}=(2\ ;\ 4)\ ;\ \overrightarrow{CD}=(-3\ ;\ 9).$$

Do đó $$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\frac{1.(-4)+(-3).2}{\sqrt{1+9}.\sqrt{16+4}}=\frac{-10}{\sqrt{200}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)=\frac{\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{CB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\frac{2.(-3)+4.9}{\sqrt{4+16}.\sqrt{9+81}}=\frac{30}{\sqrt{1800}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vì $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=-\cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)$ nên hai góc này bù nhau. Vậy tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn.

§3. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC

2.29. a) Theo định lí côsin ta có :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 12 + 4 - 2.\ 2\sqrt{3}.2.\frac{\sqrt{3}}{2} = 4.$$

Vậy $c = 2$ và tam giác ABC cân tại A có $b = c = 2$.

Ta có $\widehat{C} = 30^o$, vậy $\widehat{B} = 30^o$ và $\widehat{A} = 180^o - (30^o + 30^o) = 120^o$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}.2\sqrt{3}.2.\frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$

b) $h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1$. Vì tam giác ABC cân tại A nên $h_a = m_a = 1$.

2.30. Ta có $c = 6$ là cạnh lớn nhất của tam giác. Do đó $\widehat{C}$ là góc lớn nhất.

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3^2 + 4^2 - 6^2}{2.3.4} = -\frac{11}{24} \Rightarrow \widehat{C} \approx 117^o17'.$$

Muốn tính đường cao ứng với cạnh lớn nhất ta dùng công thức Hê-rông để tính diện tích tam giác và từ đó suy ra đường cao tương ứng.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ với } p = \frac{1}{2}(3+4+6) = \frac{13}{2}$$

$$S = \sqrt{\frac{13}{2}\left(\frac{13}{2} - 3\right)\left(\frac{13}{2} - 4\right)\left(\frac{13}{2} - 6\right)} = \frac{\sqrt{455}}{4}.$$

Ta có $h_c = \frac{2S}{c} = \frac{\sqrt{455}}{2.6} = \frac{\sqrt{455}}{12}$.

2.31. Ta có $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8 + 6 + 2 - 2\sqrt{12} - 12}{4\sqrt{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{4 - 4\sqrt{3}}{8\sqrt{3} - 8}$

$$= \frac{4(1 - \sqrt{3})}{8(\sqrt{3} - 1)} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $\widehat{A} = 120^o$.

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2.ca} = \frac{6 + 2 - 2\sqrt{12} + 12 - 8}{2.(\sqrt{6} - \sqrt{2}).2\sqrt{3}} = \frac{12 - 2\sqrt{12}}{4\sqrt{18} - 4\sqrt{6}}$$

$$= \frac{4(3 - \sqrt{3})}{4\sqrt{2}(3 - \sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$ Vậy $\widehat{B} = 45^o$.

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{ac\sin B}{a} = c\sin B = \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} - 1.$$

$$\frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow R = \frac{b}{2\sin B} = \frac{2\sqrt{2}}{2.\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2.$$

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}ac\sin B}{\frac{1}{2}(a + b + c)} = \frac{ac\sin B}{a + b + c}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{\sqrt{6} + \sqrt{3} + 1}.$$

2.32. Ta có $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{36 + 64 - 112}{2.6.8} = -\frac{1}{8}$

$$\Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{1}{64}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}.$$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}.6.8.\frac{3\sqrt{7}}{8} = 9\sqrt{7} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{18\sqrt{7}}{4\sqrt{7}} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ (cm)}.$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{4\sqrt{7}.6.8}{4.9\sqrt{7}} = \frac{16}{3} \text{ (cm)}.$$

2.33. a) $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{18^2 + 16^2}{2} - \frac{26^2}{4}$

$$= \frac{324 + 256}{2} - \frac{676}{4} = \frac{484}{4} \Rightarrow m_a = \frac{22}{2} = 11.$$

b) $\begin{cases} m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} \\ m_b^2 = \dfrac{a^2+c^2}{2} - \dfrac{b^2}{4} \\ m_c^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m_a^2 = 2(b^2+c^2) - a^2 \\ 4m_b^2 = 2(a^2+c^2) - b^2 \\ 4m_c^2 = 2(a^2+b^2) - c^2. \end{cases}$

Ta suy ra : $4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

2.34. a) Theo định lí sin ta có : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

Ta suy ra : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b+c}{\sin B + \sin C} = \dfrac{2a}{\sin B + \sin C}$

$\Rightarrow 2\sin A = \sin B + \sin C$.

b) Đối với tam giác ABC ta có : $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}h_c.c = \dfrac{abc}{4R}$.

Ta suy ra $h_c = \dfrac{ab}{2R}$. Tương tự ta có $h_b = \dfrac{ac}{2R}$, $h_a = \dfrac{bc}{2R}$. Do đó :

$$\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = 2R\left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}\right) = 2R\frac{b+c}{abc} \text{ mà } b + c = 2a$$

nên $$\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{2R.2a}{abc} = \frac{2R.2}{bc} = \frac{2}{h_a}.$$

Vậy $$\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

2.35. a) Theo định lí sin ta có $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

Do đó : $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$.

Thay các giá trị này vào biểu thức $a = b\cos C + c\cos B$ ta có :

$$2R\sin A = 2R\sin B\cos C + 2R\sin C\cos B.$$

$$\Rightarrow \sin A = \sin B\cos C + \sin C\cos B.$$

b) Ta có $h_a = \frac{2S}{a}$, mà $2S = \frac{2abc}{4R} = \frac{abc}{2R}$.

Vậy $h_a = \frac{2S}{a} = \frac{bc}{2R}$ hay $bc = 2R.h_a$, mà $b = 2R\sin B$ và $c = 2R\sin C$ nên :

$$2R\sin B.2R\sin C = 2R.h_a \Rightarrow h_a = 2R\sin B\sin C.$$

2.36. a) Theo giả thiết ta có $a^2 = bc$.

Thay $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$ vào hệ thức trên ta có :

$$4R^2\sin^2 A = 2R\sin B.2R\sin C$$

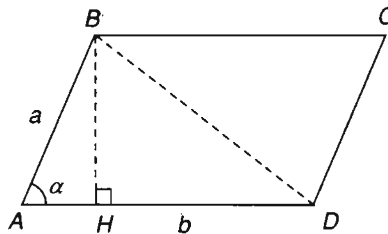
$$\Rightarrow \sin^2 A = \sin B.\sin C.$$

b) Ta có $2S = ah_a = bh_b = ch_c$.

Do đó : $a^2h_a^2 = b.c.h_b.h_c$.

Theo giả thiết : $a^2 = bc$ nên ta suy ra $h_a^2 = h_b.h_c$.

2.37. Xét hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $AD = b$. $\widehat{BAD} = \alpha$ và BH là đường cao, ta có $BH \perp AD$ tại H. (h.2.29).



Hình 2.29

Gọi S là diện tích hình bình hành $ABCD$, ta có $S = AD.BH$ với $BH = AB\sin\alpha$.

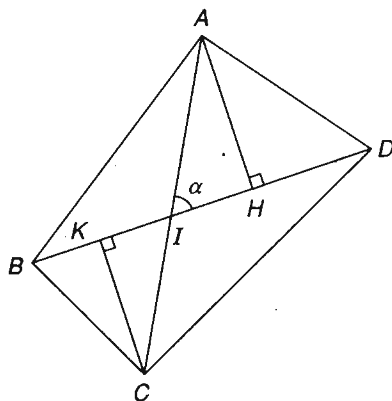
Vậy $S = AD.AB\sin\alpha = a.b\sin\alpha$.

Nếu $\widehat{BAD} = \alpha$ thì $\widehat{ABC} = 180^o - \alpha$.

Khi đó ta vẫn có $\sin\widehat{BAD} = \sin\widehat{ABC}$.

Nhận xét : Diện tích hình bình hành $ABCD$ gấp đôi diện tích tam giác ABD mà tam giác ABD có diện tích là $\frac{1}{2}ab\sin\alpha$. Do đó ta suy ra diện tích của hình bình hành bằng $ab\sin\alpha$.

2.38. a) Ta có $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{CBD}$.



Hình 2.30

Vẽ AH và CK vuông góc với BD. (h.2.30).

Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Ta có : $AH = AI\sin\alpha$

$$CK = CI\sin\alpha$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AH.BD + \frac{1}{2}CK.BD$$

$$= \frac{1}{2}BD(AH + CK)$$

$$= \frac{1}{2}BD.(AI + IC)\sin\alpha = \frac{1}{2}BD.AC\sin\alpha.$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}x.y\sin\alpha.$$

b) Nếu $AC \perp BD$ thì $\sin\alpha = 1$, khi đó $S_{ABCD} = \frac{1}{2}xy$. Như vậy nếu tứ giác lồi $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau thì diện tích của tứ giác đó bằng một nửa tích độ dài của hai đường chéo.

2.39. Gọi α là góc giữa hai đường chéo AC và BD của tứ giác $ABCD$ (h.2.31).

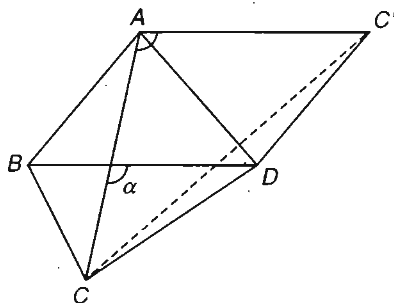
Ta có $\widehat{CAC'} = \alpha$ vì $AC' \,//\, BD$.

Theo kết quả bài 2.38 ta có :

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD\sin\alpha.$$

Mặt khác $S_{ACC'} = \frac{1}{2}AC.AC'\sin\alpha$,

mà $AC' = BD$ nên $S_{ABCD} = S_{ACC'}$.



Hình 2.31

2.40. Ta có $\widehat{B} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 180^\circ - (40^\circ + 120^\circ) = 20^\circ$.

Theo định lí sin ta có :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{35.\sin 40^\circ}{\sin 120^\circ} \approx 26 \text{ (cm)}$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{35.\sin 20^\circ}{\sin 120^\circ} \approx 14 \text{ (cm)}.$$

2.41. Theo định lí côsin ta có :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 7^2 + 23^2 - 2.7.23.\cos 130^\circ \approx 785$$

$\Rightarrow c \approx 28$ (cm). Theo định lí sin ta có :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin A = \frac{a \sin C}{c} \approx \frac{7.\sin 130^\circ}{28} \approx 0{,}1915,$$

Vậy $\widehat{A} \approx 11^\circ 2'$.

$$\widehat{B} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C}) \approx 180^\circ - (11^\circ 2' + 130^\circ) = 38^\circ 58'.$$

2.42. Theo định lí côsin ta có :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{18^2 + 20^2 - 14^2}{2.18.20} = \frac{528}{720} \approx 0{,}7333,$$

Vậy $\widehat{A} \approx 42^\circ 50'$.

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{14^2 + 20^2 - 18^2}{2.14.20} = \frac{272}{560} \approx 0{,}4857,$$

Vậy $\widehat{B} \approx 60^\circ 56'$.

$$\widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) \approx 180^\circ - (42^\circ 50' + 60^\circ 56') = 76^\circ 14'.$$

2.43. Muốn tính chiều cao CD của tháp, trước hết ta hãy tính góc $\widehat{ADB}$.

$$\widehat{ADB} = 67^\circ - 43^\circ = 24^\circ.$$

Theo định lí sin đối với tam giác ABD ta có :

$$\frac{BD}{\sin 43^\circ} = \frac{AB}{\sin 24^\circ} \Rightarrow BD = \frac{30.\sin 43^\circ}{\sin 24^\circ} \approx 50{,}30 \text{ (m)}.$$

Trong tam giác vuông BCD ta có :

$$\sin 67^\circ = \frac{CD}{BD} \quad \Rightarrow CD = BD.\sin 67^\circ \approx 50{,}30.\sin 67^\circ$$

hay $CD \approx 46{,}30$ (m).

2.44. Theo định lí sin đối với tam giác ABC ta có :

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{5}{\sin A} = \frac{12}{\sin 37^\circ}$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{5.\sin 37^\circ}{12} \approx 0{,}2508$$

$$\Rightarrow \widehat{A} \approx 14^\circ 31'.$$

$$\widehat{B} \approx 180^\circ - (37^\circ + 14^\circ 31') = 128^\circ 29'.$$

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{12}{\sin C} \Rightarrow AC = \frac{12.\sin B}{\sin C} \approx \frac{12.\sin 128^\circ 29'}{\sin 37^\circ} \approx 15{,}61 \text{ (m)}.$$

Vậy khoảng cách $AC \approx 15{,}61$ (m).

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II

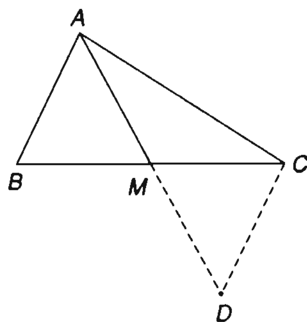
2.45. Gọi M là trung điểm của cạnh BC ta có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD}.$$

Mặt khác $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. Theo giả thiết ta có :

$$|2\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{AD}| \text{ hay } AM = \frac{BC}{2}.$$

Ta suy ra ABC là tam giác vuông tại A (h.2.32).



Hình 2.32

2.46. Theo giả thiết ta có :

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 = 0.$$

Ta suy ra ABC là tam giác có $AB = AC$ (tam giác cân tại A).

2.47. a) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 49 + 100 - 140\cos 56^o29'$

$\Rightarrow c^2 \approx 71{,}7$ hay $c \approx 8{,}47$;

b) $b \approx 4{,}43$;

c) $a \approx 11{,}63$.

2.48. Ta có $\widehat{A} = 180^o - (60^o + 45^o) = 75^o$.

Đặt $AC = b, AB = c$. Theo định lí sin :

$$\frac{b}{\sin 60^o} = \frac{a}{\sin 75^o} = \frac{c}{\sin 45^o}.$$ Ta suy ra :

$$AC = b = \frac{a\sqrt{3}}{2\sin 75^o} \approx \frac{a\sqrt{3}}{1{,}93} \approx 0{,}897a,$$

$$AB = c = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin 75^o} \approx \frac{a\sqrt{2}}{1{,}93} \approx 0{,}732a.$$

2.49. Ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 35^2 + 20^2 - 35.20 = 925$.

Vậy $a \approx 30{,}41$.

a) Từ công thức $S = \frac{1}{2}ah_a$ ta có $h_a = \frac{2S}{a} = \frac{bc\sin A}{a}$

$$\Rightarrow h_a = \frac{20.35.\frac{\sqrt{3}}{2}}{30{,}41} \approx 19{,}94.$$

b) Từ công thức $\frac{a}{\sin A} = 2R$ ta có $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{30{,}41}{\sqrt{3}} \approx 17{,}56$.

c) Từ công thức $S = pr$ với $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ ta có :

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{bc\sin A}{a+b+c} \approx 7{,}10.$$

2.50. Ta có $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

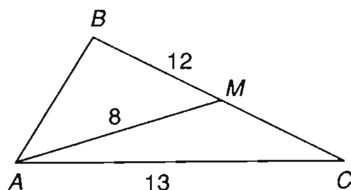
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$\Rightarrow\ b^2 - c^2 = c^2 - b^2 + 2a(b\cos C - c\cos B)$

$\Rightarrow\ 2(b^2 - c^2) = 2a(b\cos C - c\cos B)$

hay $b^2 - c^2 = a(b\cos C - c\cos B)$.

2.51. Theo công thức Hê-rông ta có :



Hình 2.33

$$S_{AMC} = \sqrt{\frac{27}{2}\left(\frac{27}{2}-13\right)\left(\frac{27}{2}-6\right)\left(\frac{27}{2}-8\right)}$$

$$= \frac{9\sqrt{55}}{4} \text{ (h.2.33).}$$

$$S_{ABC} = 2S_{AMC} = \frac{9\sqrt{55}}{2}.$$

Mặt khác ta có $AM^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ hay $2AM^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$.

Do đó $AB^2 = c^2 = 2AM^2 - b^2 + \frac{a^2}{2} = 2.64 - 169 + 72 = 31$

$$\Rightarrow \quad c = \sqrt{31}.$$

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{144+31-169}{24\sqrt{31}} \approx 0{,}045 \Rightarrow \widehat{B} \approx 87^\circ 25'.$$

2.52. Tam giác ABC có ba cạnh là $BC = 14$, $CA = 18$, $AB = 20$, ta cần tìm các góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.

Ta có $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{18^2+20^2-14^2}{2.18.20} \approx 0{,}7333$

$$\Rightarrow \widehat{A} \approx 42^\circ 50'.$$

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{14^2+20^2-18^2}{2.14.20} \approx 0{,}4857$$

$$\Rightarrow \widehat{B} \approx 60^\circ 56'.$$

$$\widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) \approx 76^\circ 14'.$$

2.53. Tam giác ABC có cạnh $c = AB = 14$ và có $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{B} = 40^\circ$. Ta có $\widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 80^\circ$, cần tìm a và b. Theo định lí sin :

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ta suy ra $a = \frac{c\sin A}{\sin C} = \frac{7\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} \approx 12{,}31$

$$b = \frac{c\sin B}{\sin C} = \frac{14\sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 9{,}14.$$

2.54. Theo định lí côsin ta có :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = (49{,}4)^2 + (26{,}4)^2 - 2\,.\,49{,}4\,.\,26{,}4\,.\cos 47^\circ 20'$$
$$\approx 1369{,}5781.$$

Vậy $c = \sqrt{1369{,}5781} \approx 37$.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx \frac{(26{,}4)^2 + (37)^2 - (49{,}4)^2}{2.26{,}4.37} \approx -0{,}1914$$

Ta suy ra $\widehat{A} \approx 101^\circ 2'$.

$\widehat{B} \approx 180^\circ - (101^\circ 2' + 47^\circ 20') = 31^\circ 38'$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

2.55. Áp dụng công thức $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ta tính được $a = \sqrt{3}$ (cm). Chọn (C).

2.56. Áp dụng công thức $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ta tính được $\cos A = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$.

Vậy $\widehat{A} > 60^\circ$. Chọn (C).

2.57. Ta có $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} = 25 \Rightarrow m_a = 5$ (cm). Chọn (B).

2.58. Dùng công thức $S = pr$ ta có $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{24}{12} = 2$ (cm). Chọn (C).

2.59. Ta có $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow m_a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (cm). Chọn (C).

2.60. Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}CH.AB$ với $CH = \dfrac{3}{2}R$ và $AB = R\sqrt{3}$, mà $R = 4$ nên $S_{ABC} = 12\sqrt{3}$ (cm^2). Chọn (C).

2.61. Dùng công thức $S = pr$ với $p = \dfrac{a(2+\sqrt{2})}{2}$ nên $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{a}{2+\sqrt{2}}$. Chọn (C).

2.62. $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$

$\Leftrightarrow (a + b)^2 - c^2 = 3ab$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab - c^2 = 3ab,$

mà $a^2 + b^2 - 2ab\cos C = c^2$

nên $2ab\cos C = ab \Rightarrow \cos C = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{C} = 60^\circ$. Chọn (D).

2.63. Cắt hình bình hành theo đường chéo BD rồi ghép cho cạnh BC trùng với AD, ta được một hình vuông cạnh a và có $S = a^2$. Chọn (C).

2.64. $BM^2 = \frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} = \frac{a^2 + 2a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

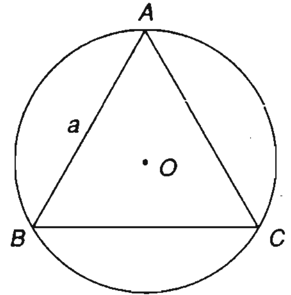
$\Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Chọn (D).

2.65. Tam giác đều cạnh a có đường cao $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mặt khác $h = \frac{3}{2}R$ (h.2.34)

Do đó : $\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}R \Leftrightarrow a\sqrt{3} = 3R$.

Vậy $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Chọn (C).

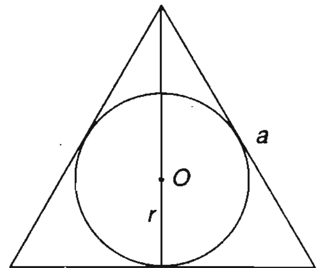


Hình 2.34

2.66. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a (h.2.35). Ta có :

$$\left.\begin{aligned} 3r &= h \\ \frac{a\sqrt{3}}{2} &= h \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

hay $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Chọn (C).



Hình 2.35

2.67. Ta có $S = \frac{1}{2}ab\sin C$,

S đạt cực đại khi $\sin C = 1$ nghĩa là $\widehat{C} = 90^{\circ}$. Chọn (B).

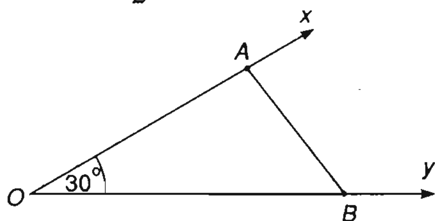
2.68. Gọi S' là diện tích của tam giác mới, ta có :

$$S' = \frac{1}{2}.2a.2b\sin C = 2ab\sin C.$$

Vậy $S' = 4S$. Chọn (C).

2.69. Ta có $\frac{OB}{\sin A} = \frac{AB}{\sin 30^{\circ}}$ (h.2.36)

$$\Rightarrow OB = \frac{AB\sin A}{\sin 30^{\circ}} = \frac{2\sin A}{\frac{1}{2}} = 4\sin A.$$



Hình 2.36

OB đạt cực đại khi $\sin A = 1$ nghĩa là $\widehat{A} = 90^{\circ}$, khi đó $OB = 4$. Chọn (C).

2.70. Ta có $\overrightarrow{AB} = (3\,;-1)$. Do đó $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$. Chọn (D).

2.71. Ta có $\overrightarrow{AB} = (3\,;3)$, $\overrightarrow{BC} = (4\,;-4)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0$. Vậy tam giác ABC vuông tại B.

Hay ta có $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}.$

Vậy $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Tam giác ABC vuông tại B có cạnh huyền là AC.

Chọn (B).

CHƯƠNG III

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

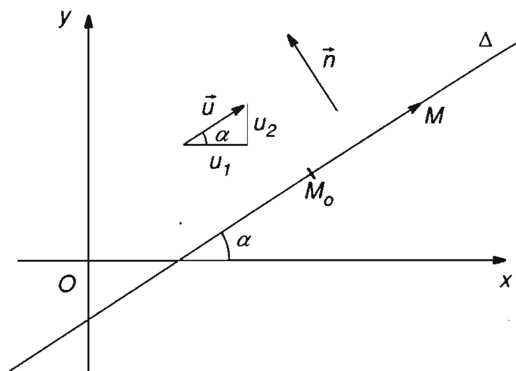
§1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình tham số (h.3.1)

• Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1 ; u_2)$ là $\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$

$\left(u_1^2 + u_2^2 \neq 0\right)$ (h.3.1).



Hình 3.1

• Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ và có hệ số góc k là : $y - y_0 = k(x - x_0)$.

• Nếu Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1 ; u_2)$ với $u_1 \neq 0$ thì hệ số góc của Δ là $k = \dfrac{u_2}{u_1}$.

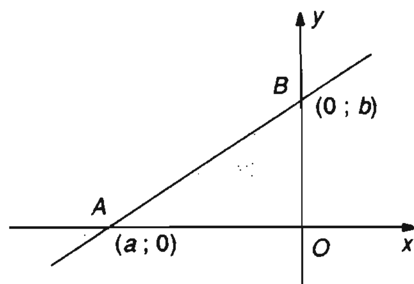
Nếu Δ có hệ số góc là k thì Δ có vectơ chỉ phương là : $\vec{u} = (1 ; k)$.

2. Phương trình tổng quát

• Phương trình của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a ; b)$ là : $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$.

• Phương trình $ax + by + c = 0$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng nhận $\vec{n} = (a ; b)$ làm vectơ pháp tuyến.

• Đường thẳng Δ cắt Ox và Oy lần lượt tại $A(a ; 0)$ và $B(0 ; b)$ có phương trình theo đoạn chắn là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $(a, b \neq 0)$ (h.3.2).



Hình 3.2

3. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0.$

Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 ta xét số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases} \quad \text{(I)}$$

• Hệ (I) có một nghiệm : Δ_1 cắt Δ_2.

• Hệ (I) vô nghiệm : $\Delta_1 // \Delta_2$.

• Hệ (I) có vô số nghiệm : $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.

☞ ***Chú ý :*** Nếu $a_2b_2c_2 \neq 0$ thì : – Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$;

– $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;

– $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

4. Góc giữa hai đường thẳng

Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có phương trình cho ở mục 3, có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}$ và $\overrightarrow{n_2}$ được tính bởi công thức :

$$\cos\left(\widehat{\Delta_1,\Delta_2}\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{\left|a_1a_2+b_1b_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

5. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0;\ y_0)$ đến đường thẳng Δ có phương trình : $ax+by+c=0$ được cho bởi công thức $d(M_0,\Delta)=\dfrac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN



VẤN ĐỀ 1

Viết phương trình tham số của đường thẳng

1. Phương pháp

Để viết phương trình tham số của đường thẳng Δ ta thực hiện các bước :

– Tìm vectơ chỉ phương $\vec{u}=(u_1\,;\,u_2)$ của đường thẳng Δ ;

– Tìm một điểm $M_0(x_0\,;\,y_0)$ thuộc Δ ;

– Phương trình tham số của Δ là : $\begin{cases}x=x_0+tu_1\\ y=y_0+tu_2.\end{cases}$

 ***Chú ý***

– Nếu Δ có hệ số góc k thì Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1\,;\,k)$.

– Nếu Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(a\,;\,b)$ thì Δ có vectơ chỉ phương

$\vec{u}=(-b\,;\,a)$ hoặc $\vec{u}=(b\,;\,-a)$.

2. Các ví dụ



Ví dụ 1. Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau :

a) Δ đi qua điểm $M(2 ; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3 ; 4)$;

b) Δ đi qua điểm $M(5 ; -2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (4 ; -3)$.

GIẢI

a) Phương trình tham số của Δ là : $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 4t. \end{cases}$

b) Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (4 ; -3)$ nên có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3 ; 4)$.

Phương trình tham số của Δ là : $\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -2 + 4t. \end{cases}$



Ví dụ 2. Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau :

a) Δ đi qua điểm $M(5 ; 1)$ và có hệ số góc $k = 3$;

b) Δ đi qua hai điểm $A(3 ; 4)$ và $B(4 ; 2)$.

GIẢI

a) Δ có hệ số góc $k = 3$ nên Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1 ; 3)$.

Phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 + 3t. \end{cases}$

b) Δ đi qua A và B nên Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1 ; -2)$.

Phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 - 2t. \end{cases}$



VẤN ĐỀ 2

Viết phương trình tổng quát của đường thẳng

1. Phương pháp

Để viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ ta thực hiện các bước :

– Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a\ ;\ b)$ của Δ ;

– Tìm một điểm $M_0(x_0\ ;\ y_0)$ thuộc Δ ;

– Viết phương trình Δ theo công thức : $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$;

– Biến đổi về dạng : $ax + by + c = 0$.

Chú ý

– Nếu đường thẳng Δ cùng phương với đường thẳng $d : ax + by + c = 0$ thì Δ có phương trình tổng quát : $ax + by + c' = 0$.

– Nếu đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d : ax + by + c = 0$ thì Δ có phương trình tổng quát : $-bx + ay + c'' = 0$.

2. Các ví dụ



Ví dụ 1. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng *d* trong mỗi trường hợp sau :

a) *d* đi qua điểm $M(3\ ;\ 4)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1\ ;\ 2)$;

b) *d* đi qua điểm $M(3\ ;\ -2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (4\ ;\ 3)$.

GIẢI

a) Phương trình tổng quát của đường thẳng *d* có dạng

$$1(x - 3) + 2(y - 4) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 11 = 0.$$

b) Đường thẳng *d* có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (4\ ;\ 3)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3\ ;\ -4)$.

Vậy phương trình tổng quát của *d* có dạng :

$$3(x - 3) - 4(y + 2) = 0 \quad \text{hay} \quad 3x - 4y - 17 = 0.$$



Ví dụ 2. Cho tam giác *ABC*, biết $A(1\ ;\ 4)$, $B(3\ ;\ -1)$, $C(6\ ;\ 2)$. Lập phương trình tổng quát của các đường thẳng chứa đường cao *AH* và trung tuyến *AM* của tam giác.

GIẢI

AH có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{BC} = (3\ ;\ 3)$ hoặc $\vec{n} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = (1\ ;\ 1)$.

Phương trình tổng quát của đường thẳng chứa AH là :

$$1(x-1)+1(y-4)=0$$

$$\Leftrightarrow x+y-5=0.$$

Ta tính được toạ độ trung điểm M của BC như sau :

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{3+6}{2}=\frac{9}{2}$$

$$y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}.$$

Ta có $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{7}{2};-\frac{7}{2}\right)$.

Trung tuyến AM có vectơ chỉ phương $\vec{u}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AM}=(1\,;-1)$ nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1\,;1)$. Vậy phương trình tổng quát của đường thẳng chứa AM là :

$$(x-1)+(y-4)=0 \Leftrightarrow x+y-5=0.$$

☞ ***Chú ý.*** Tam giác ABC có đường cao AH trùng với trung tuyến AM nên tam giác ABC cân tại A.



VẤN ĐỀ 3

Vị trí tương đối của hai đường thẳng

1. Phương pháp

• Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$\Delta_1: a_1x+b_1y+c_1=0$$

$$\Delta_2: a_2x+b_2y+c_2=0$$

ta xét số nghiệm của hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0. \end{cases} \quad (*)$$

Cụ thể :

Hệ (*) có nghiệm duy nhất : Δ_1 cắt Δ_2.

Hệ (*) vô nghiệm : Δ_1 // Δ_2.

Hệ (*) có vô số nghiệm : $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.

• Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 được tính bởi công thức :

$$\cos\left(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}\right) = \frac{\left|a_1a_2 + b_1b_2\right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

2. Các ví dụ



Ví dụ 1. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau :

a) $d_1 : 4x - 10y + 1 = 0$ và $d_2 : x + y + 2 = 0$;

b) $d_3 : 12x - 6y + 10 = 0$ và $d_4 : 2x - y + 5 = 0$;

c) $d_5 : 8x + 10y - 12 = 0$ và $d_6 : \begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 6 - 4t. \end{cases}$

GIẢI

a) Ta có $\frac{4}{1} \neq \frac{-10}{1}$. Vậy d_1 cắt d_2.

b) Ta có $\frac{12}{2} = \frac{-6}{-1} \neq \frac{10}{5}$. Vậy $d_3 // d_4$.

c) Phương trình tổng quát của d_6 là : $4x + 5y - 6 = 0$.

Ta có : $\frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{-6}{-12}$. Vậy $d_5 \equiv d_6$.



Ví dụ 2. Cho hai đường thẳng $d_1 : x - 2y + 5 = 0$ và $d_2 : 3x - y = 0$.

a) Tìm giao điểm của d_1 và d_2 ;

b) Tính góc giữa d_1 và d_2.

GIẢI

a) Giao điểm của d_1 và d_2 là điểm có toạ độ là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x-2y+5=0 \\ 3x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3. \end{cases}$$

Vậy d_1 cắt d_2 tại điểm (1 ; 3).

b) $\cos\left(\widehat{d_1,d_2}\right)=\dfrac{\left|a_1a_2+b_1b_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2}}=\dfrac{|3+2|}{\sqrt{1+4}.\sqrt{9+1}}=\dfrac{5}{5\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy $\left(\widehat{d_1,d_2}\right)=45^{\circ}$.



VẤN ĐỀ 4

Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

1. Phương pháp

• Để tính khoảng cách từ điểm $M_0(x_0\,;\;y_0)$ đến đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$ ta dùng công thức

$$d(M_0,\Delta)=\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

• Nếu đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$ chia mặt phẳng Oxy thành hai nửa mặt phẳng có bờ là Δ, ta luôn có :

– Một nửa mặt phẳng chứa các điểm $M_1(x_1\,;\;y_1)$ thoả mãn

$$\Delta(M_1)=ax_1+by_1+c>0\;;$$

– Nửa mặt phẳng còn lại chứa các điểm $M_2(x_2\,;\;y_2)$ thoả mãn

$$\Delta(M_2)=ax_2+by_2+c<0.$$

• Cho hai đường thẳng cắt nhau Δ_1, Δ_2 có phương trình :

$$\Delta_1: a_1x+b_1y+c_1=0$$

$$\Delta_2: a_2x+b_2y+c_2=0.$$

Gọi d và d' là hai đường thẳng chứa đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

Ta có : $M(x, y) \in d \cup d'$

$$\Leftrightarrow d(M, \Delta_1) = d(M, \Delta_2) \Leftrightarrow \frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Vậy phương trình của hai đường phân giác của các góc hợp bởi Δ_1 và Δ_2 là :

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

2. Các ví dụ



Ví dụ 1. Tính khoảng cách từ điểm đến đường thẳng được cho tương ứng như sau :

a) $A(3 ; 5)$ và $\Delta : 4x + 3y + 1 = 0$;

b) $B(1 ; 2)$ và $\Delta' : 3x - 4y + 1 = 0$.

GIẢI

a) Ta có $d(A, \Delta) = \dfrac{|4.3 + 3.5 + 1|}{\sqrt{16 + 9}} = \dfrac{28}{5}$.

b) $d(B, \Delta') = \dfrac{|3.1 - 4.2 + 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \dfrac{4}{5}$.



Ví dụ 2. Cho đường thẳng $\Delta : x - y + 2 = 0$ và hai điểm $O(0 ; 0)$, $A(2 ; 0)$.

a) Chứng tỏ rằng hai điểm A và O nằm về cùng một phía đối với đường thẳng Δ.

b) Tìm điểm O' đối xứng của O qua Δ.

c) Tìm điểm M trên Δ sao cho độ dài của đoạn gấp khúc OMA ngắn nhất.

GIẢI

a) Ta có $\Delta(A) = 2 - 0 + 2 = 4 > 0$

$\Delta(O) = 0 - 0 + 2 = 2 > 0$.

Vậy A và O nằm về cùng một phía đối với đường thẳng Δ.

b) Gọi d là đường thẳng đi qua O và vuông góc với Δ tại H. Phương trình tham số của d là $\begin{cases} x = t \\ y = -t. \end{cases}$

Vì $H \in d$ nên toạ độ của H có dạng $(x_H ; -x_H)$.

Mặt khác : $H \in \Delta \Rightarrow x_H - (-x_H) + 2 = 0 \Rightarrow x_H = -1$.

Vậy H có toạ độ là $(-1 ; 1)$.

Vì H là trung điểm của OO' nên $x_{O'} = 2x_H = -2$

$$y_{O'} = 2y_H = 2.$$

Vậy O' có toạ độ là $(-2 ; 2)$.

c) Ta có $OM + MA = O'M + MA$.

Độ dài của đoạn gấp khúc OMA ngắn nhất $\Leftrightarrow O', M, A$ thẳng hàng $\Leftrightarrow O'A$ cắt Δ tại M.

Phương trình đường thẳng $O'A$ là : $x + 2y - 2 = 0$.

Toạ độ của $M(x ; y)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Vậy điểm $M\left(-\dfrac{2}{3} ; \dfrac{4}{3}\right)$ thoả mãn yêu cầu đề bài.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

3.1. Lập phương trình tham số của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau :

a) d đi qua điểm $A(-5 ; -2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (4 ; -3)$;

b) d đi qua hai điểm $A(\sqrt{3} ; 1)$ và $B(2+\sqrt{3} ; 4)$.

3.2. Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t. \end{cases}$

a) Tìm điểm M nằm trên Δ và cách điểm $A(0 ; 1)$ một khoảng bằng 5.

b) Tìm toạ độ giao điểm của đường thẳng Δ với đường thẳng $x + y + 1 = 0$.

c) Tìm điểm M trên Δ sao cho AM ngắn nhất.

3.3. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau :

a) Δ đi qua điểm $M(1 ; 1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3 ; -2)$;

b) Δ đi qua điểm $A(2 ; -1)$ và có hệ số góc $k = -\dfrac{1}{2}$;

c) Δ đi qua hai điểm $A(2 ; 0)$ và $B(0 ; -3)$.

3.4. Lập phương trình ba đường trung trực của một tam giác có trung điểm các cạnh lần lượt là $M(-1 ; 0)$, $N(4 ; 1)$, $P(2 ; 4)$.

3.5. Cho điểm $M(1 ; 2)$. Hãy lập phương trình của đường thẳng qua M và chắn trên hai trục toạ độ hai đoạn có độ dài bằng nhau.

3.6. Cho tam giác ABC, biết phương trình đường thẳng $AB : x - 3y + 11 = 0$, đường cao $AH : 3x + 7y - 15 = 0$, đường cao $BH : 3x - 5y + 13 = 0$. Tìm phương trình hai đường thẳng chứa hai cạnh còn lại của tam giác.

3.7. Cho tam giác ABC có $A(-2 ; 3)$ và hai đường trung tuyến : $2x - y + 1 = 0$ và $x + y - 4 = 0$. Hãy viết phương trình ba đường thẳng chứa ba cạnh của tam giác.

3.8. Với giá trị nào của tham số m thì hai đường thẳng sau đây vuông góc :

$\Delta_1 : mx + y + q = 0$ và $\Delta_2 : x - y + m = 0$?

3.9. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây :

a) $d : \begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$ và $d' : \begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$;

b) $d : \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$ và $d' : 2x + 4y - 10 = 0$;

c) $d : x + y - 2 = 0$ và $d' : 2x + y - 3 = 0$.

3.10. Tìm góc giữa hai đường thẳng :

$d_1 : x + 2y + 4 = 0$ và $d_2 : 2x - y + 6 = 0.$

3.11. Tính bán kính của đường tròn có tâm là điểm $I(1 ; 5)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : 4x - 3y + 1 = 0.$

3.12. Lập phương trình các đường phân giác của các góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1 : 2x + 4y + 7 = 0$ và $\Delta_2 : x - 2y - 3 = 0.$

3.13. Tìm phương trình của tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng :

$\Delta_1 : 5x + 3y - 3 = 0$ và $\Delta_2 : 5x + 3y + 7 = 0.$

3.14. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(2 ; 5)$ và cách đều hai điểm $A(-1 ; 2)$ và $B(5 ; 4)$.

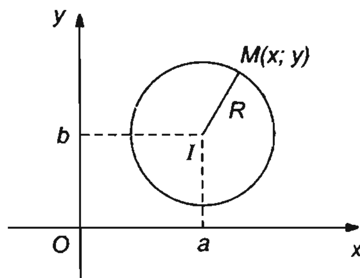
§2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình đường tròn (h.3.3)

• Phương trình đường tròn tâm $I(a ; b)$, bán kính R là :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$



Hình 3.3

• Nếu $a^2 + b^2 - c > 0$ thì phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ là phương trình của đường tròn tâm $I(a ; b)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

• Nếu $a^2 + b^2 - c = 0$ thì chỉ có một điểm $I(a ; b)$ thoả mãn phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$

• Nếu $a^2 + b^2 - c < 0$ thì không có điểm $M(x ; y)$ nào thoả mãn phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$

2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0;\ y_0)$ của đường tròn tâm $I(a\ ;\ b)$ có phương trình :

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0.$$

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN



VẤN ĐỀ 1

Nhận dạng một phương trình bậc hai là phương trình đường tròn. Tìm tâm và bán kính đường tròn

1. Phương pháp

Cách 1 : – Đưa phương trình về dạng :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0. \qquad (1)$$

– Xét dấu biểu thức $m = a^2 + b^2 - c$.

– Nếu $m > 0$ thì (1) là phương trình đường tròn tâm $I(a\ ;\ b)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

Cách 2 : – Đưa phương trình về dạng

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = m. \qquad (2)$$

– Nếu $m > 0$ thì (2) là phương trình đường tròn tâm $I(a\ ;\ b)$, bán kính $R = \sqrt{m}$.

2. Các ví dụ



Ví dụ 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào biểu diễn đường tròn ? Tìm tâm và bán kính nếu có :

a) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 100 = 0$ (1)

b) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ (2)

c) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 2 = 0.$ (3)

GIẢI

a) (1) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, với $a = 3$, $b = -4$, $c = 100$.

Ta có $a^2 + b^2 - c = 9 + 16 - 100 < 0$.

Vậy (1) không phải là phương trình của đường tròn.

b) (2) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, với $a = -2$, $b = 3$, $c = -12$.

Ta có $a^2 + b^2 - c = 4 + 9 + 12 = 25 > 0$.

Vậy (2) là phương trình của đường tròn tâm là điểm (–2 ; 3), bán kính bằng $\sqrt{a^2 + b^2 - c} = 5$.

c) Ta có : (3) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 6$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = (\sqrt{6})^2$$

Vậy (3) là phương trình của đường tròn tâm là điểm (1 ; –2), bán kính bằng $\sqrt{6}$.



Ví dụ 2. Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 6m - 1 = 0$. (1)

a) Với giá trị nào của m thì (1) là phương trình của đường tròn ?

b) Nếu (1) là phương trình của đường tròn hãy tìm toạ độ tâm và tính bán kính đường tròn đó theo m.

GIẢI

a) (1) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a = m$, $b = -2m$, $c = 6m - 1$.

(1) là phương trình của đường tròn khi và chỉ khi $a^2 + b^2 - c > 0$, mà

$$a^2 + b^2 - c > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m^2 - 6m + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 - 6m + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < \dfrac{1}{5} \\ m > 1. \end{array}\right.$$

b) Khi $m < \dfrac{1}{5} \vee m > 1$ thì (1) là phương trình của đường tròn tâm $I(m\,;\,-2m)$ và có bán kính $R = \sqrt{5m^2 - 6m + 1}$.



VẤN ĐỀ 2

Lập phương trình của đường tròn

1. Phương pháp

Cách 1 :

– Tìm toạ độ tâm $I(a\ ;\ b)$ của đường tròn ($\mathscr{C}$) ;

– Tìm bán kính R của ($\mathscr{C}$) ;

– Viết phương trình ($\mathscr{C}$) theo dạng $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. (1)

 ***Chú ý***

– ($\mathscr{C}$) đi qua $A, B \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 = R^2$.

– ($\mathscr{C}$) đi qua A và tiếp xúc với đường thẳng Δ tại $A \Leftrightarrow IA = d(I, \Delta)$.

– ($\mathscr{C}$) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và $\Delta_2 \Leftrightarrow d(I, \Delta_1) = d(I, \Delta_2) = R$.

Cách 2 :

– Gọi phương trình của đường tròn ($\mathscr{C}$) là $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (2)

– Từ điều kiện của đề bài đưa đến hệ phương trình với ẩn số là a, b, c.

– Giải hệ phương trình tìm a, b, c thế vào (2) ta được phương trình đường tròn ($\mathscr{C}$).

2. Các ví dụ

 **Ví dụ 1.** Lập phương trình của đường tròn ($\mathscr{C}$) trong các trường hợp sau :

a) ($\mathscr{C}$) có tâm $I(-1\ ;\ 2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : x-2y+7=0$;

b) ($\mathscr{C}$) có đường kính là AB với $A(1\ ;\ 1)$, $B(7\ ;\ 5)$.

GIẢI

a) Ta có $R = d(I, \Delta) = \dfrac{|-1-4+7|}{\sqrt{1+4}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Vậy phương trình của ($\mathscr{C}$) là : $(x+1)^2+(y-2)^2 = \dfrac{4}{5}$.

b) Tâm I của ($\mathscr{C}$) là trung điểm của AB.

Ta có : $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1+7}{2} = 4$

$y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{1+5}{2} = 3.$

Do đó : $IA = \sqrt{(1-4)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{13}.$

Vậy phương trình của ($\mathscr{C}$) là : $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 13.$



Ví dụ 2. Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm $A(1 ; 2)$, $B(5 ; 2)$, $C(1 ; -3)$.

GIẢI

Xét đường tròn ($\mathscr{C}$) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$

($\mathscr{C}$) đi qua A, B, C khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 1+4-2a-4b+c=0 \\ 25+4-10a-4b+c=0 \\ 1+9-2a+6b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+4b-c=5 \\ 10a+4b-c=29 \\ 2a-6b-c=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-\dfrac{1}{2} \\ c=-1. \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn đi qua ba điểm A, B, C là :

$$x^2 + y^2 - 6x + y - 1 = 0.$$



VẤN ĐỀ 3

Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn

1. Phương pháp

Loại 1. Lập phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ thuộc đường tròn ($\mathscr{C}$).

– Tìm toạ độ tâm $I(a ; b)$ của ($\mathscr{C}$).

– Phương trình tiếp tuyến với ($\mathscr{C}$) tại $M_0(x_0 ; y_0)$ có dạng :

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0.$$

Loại 2. Lập phương trình tiếp tuyến Δ với ($\mathscr{C}$) khi chưa biết tiếp điểm :

Dùng điều kiện tiếp xúc để xác định Δ :

Δ tiếp xúc với đường tròn ($\mathscr{C}$) tâm I, bán kính $R \Leftrightarrow d(I, \Delta) = R$.

2. *Các ví dụ*



Ví dụ 1. Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn

$$(\mathscr{C}) : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$$

tại điểm $M_0(4 ; 2)$ thuộc đường tròn ($\mathscr{C}$).

GIẢI

($\mathscr{C}$) có tâm là điểm (1 ; – 2). Vậy phương trình tiếp tuyến với ($\mathscr{C}$) tại $M_0(4 ; 2)$ có dạng :

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4-1)(x-4) + (2+2)(y-2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 20 = 0.$$



Ví dụ 2. Lập phương trình tiếp tuyến với đường tròn

$$(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0.$$

Biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm $A(3 ; -2)$.

GIẢI

Phương trình của đường thẳng Δ đi qua $A(3 ; -2)$ có dạng

$$y + 2 = k(x-3) \Leftrightarrow kx - y - 2 - 3k = 0.$$

($\mathscr{C}$) có tâm $I(2 ; 1)$ và có bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} = \sqrt{4 + 1 - 0} = \sqrt{5}$.

Δ tiếp xúc với ($\mathscr{C}$) $\Leftrightarrow d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \dfrac{|2k - 1 - 2 - 3k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow (3+k)^2 = 5(k^2+1) \Leftrightarrow 4k^2 - 6k - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 2 \\ k = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vậy có hai tiếp tuyến với ($\mathscr{C}$) kẻ từ A là : $\Delta_1 : 2x - y - 8 = 0$;

$\Delta_2 : x + 2y + 1 = 0.$

 **Ví dụ 3.** Viết phương trình tiếp tuyến Δ với đường tròn

$$(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$$

biết rằng Δ song song với đường thẳng $d : 3x - y + 2006 = 0$.

GIẢI

($\mathscr{C}$) có tâm $I(2 ; -3)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$.

Phương trình của đường thẳng Δ song song với d có dạng :

$$\Delta : 3x - y + c = 0.$$

Δ tiếp xúc với ($\mathscr{C}$) khi và chỉ khi

$$d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|6+3+c|}{\sqrt{9+1}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow |c+9| = 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 1 \\ c = -19. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình của Δ là $3x - y + 1 = 0$ hay $3x - y - 19 = 0$.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

3.15. Trong mặt phẳng Oxy, hãy lập phương trình của đường tròn ($\mathscr{C}$) có tâm là điểm (2 ; 3) và thoả mãn điều kiện sau :

a) ($\mathscr{C}$) có bán kính là 5 ;

b) ($\mathscr{C}$) đi qua gốc toạ độ ;

c) ($\mathscr{C}$) tiếp xúc với trục Ox ;

d) ($\mathscr{C}$) tiếp xúc với trục Oy ;

e) ($\mathscr{C}$) tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : 4x + 3y - 12 = 0$.

3.16. Cho ba điểm $A(1 ; 4)$, $B(-7 ; 4)$, $C(2 ; -5)$.

a) Lập phương trình đường tròn ($\mathscr{C}$) ngoại tiếp tam giác ABC ;

b) Tìm tâm và bán kính của ($\mathscr{C}$).

3.17. Cho đường tròn ($\mathscr{C}$) đi qua hai điểm $A(-1 ; 2)$, $B(-2 ; 3)$ và có tâm ở trên đường thẳng $\Delta : 3x - y + 10 = 0$.

a) Tìm toạ độ tâm của ($\mathscr{C}$) ;

b) Tính bán kính R của ($\mathscr{C}$) ;

c) Viết phương trình của ($\mathscr{C}$).

3.18. Cho ba đường thẳng

$$\Delta_1 : 3x + 4y - 1 = 0$$

$$\Delta_2 : 4x + 3y - 8 = 0$$

$$d : 2x + y - 1 = 0.$$

a) Lập phương trình các đường phân giác của các góc hợp bởi Δ_1 và Δ_2.

b) Xác định toạ độ tâm I của đường tròn ($\mathscr{C}$) biết rằng I nằm trên d và ($\mathscr{C}$) tiếp xúc với Δ_1 và Δ_2.

c) Viết phương trình của ($\mathscr{C}$).

3.19. Lập phương trình của đường tròn ($\mathscr{C}$) đi qua hai điểm $A(1 ; 2)$, $B(3 ; 4)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : 3x + y - 3 = 0$.

3.20. Lập phương trình của đường tròn đường kính AB trong các trường hợp sau :

a) A có toạ độ $(-1 ; 1)$, B có toạ độ $(5 ; 3)$;

b) A có toạ độ $(-1 ; -2)$, B có toạ độ $(2 ; 1)$.

3.21. Lập phương trình của đường tròn ($\mathscr{C}$) tiếp xúc với các trục toạ độ và đi qua điểm $M(4 ; 2)$.

3.22. Cho đường tròn ($\mathscr{C}$) : $x^2 + y^2 - x - 7y = 0$ và đường thẳng $d : 3x + 4y - 3 = 0$.

a) Tìm toạ độ giao điểm của ($\mathscr{C}$) và (d).

b) Lập phương trình tiếp tuyến với ($\mathscr{C}$) tại các giao điểm đó.

c) Tìm toạ độ giao điểm của hai tiếp tuyến.

3.23. Cho đường tròn ($\mathscr{C}$) : $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ và điểm $A(1 ; 3)$.

a) Chứng tỏ rằng điểm A nằm ngoài đường tròn ($\mathscr{C}$).

b) Lập phương trình tiếp tuyến với ($\mathscr{C}$) xuất phát từ điểm A.

3.24. Lập phương trình tiếp tuyến Δ của đường tròn $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$ biết rằng Δ vuông góc với đường thẳng $d : 3x - y + 4 = 0$.

3.25. Cho đường tròn $(\mathscr{C}) : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ và điểm $M(2 ; -1)$.

a) Chứng tỏ rằng qua M ta vẽ được hai tiếp tuyến Δ_1 và Δ_2 với $(\mathscr{C})$. Hãy viết phương trình của Δ_1 và Δ_2.

b) Gọi M_1 và M_2 lần lượt là hai tiếp điểm của Δ_1 và Δ_2 với $(\mathscr{C})$, hãy viết phương trình của đường thẳng d đi qua M_1 và M_2.

3.26. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(\mathscr{C})$ có phương trình $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ biết rằng tiếp tuyến đó đi qua gốc toạ độ O.

3.27. Cho hai đường tròn $(\mathscr{C}_1) : x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$

và $(\mathscr{C}_2) : x^2 + y^2 - 12x - 6y + 44 = 0$.

a) Tìm tâm và bán kính của $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$.

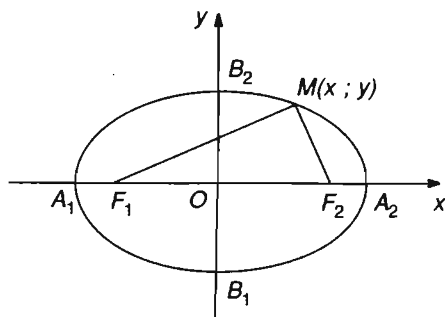
b) Lập phương trình tiếp tuyến chung của $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$.

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ELIP

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $F_1(-c ; 0)$, $F_2(c ; 0)$ và độ dài không đổi $2a$ $(a > c > 0)$. Elip (E) là tập hợp các điểm M sao cho $F_1M + F_2M = 2a$ (h.3.4). Ta có thể viết :

$(E) = \{M \mid F_1M + F_2M = 2a\}$.



Hình 3.4

2. Phương trình chính tắc của elip (E) là : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a^2 = b^2 + c^2)$.

3. Các thành phần của elip (E) là :

– Hai tiêu điểm : $F_1(-c\,;0)$, $F_2(c\,;0)$;

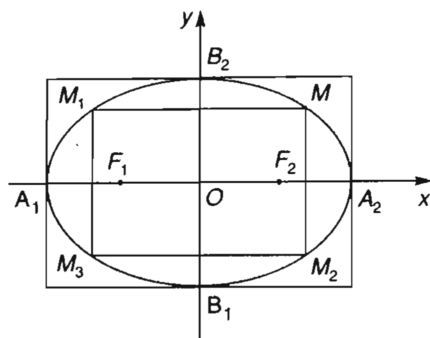
– Bốn đỉnh : $A_1(-a\,;0)$, $A_2(a\,;0)$,

$B_1(0\,;-b)$, $B_2(0\,;b)$;

– Độ dài trục lớn : $A_1A_2 = 2a$;

– Độ dài trục nhỏ : $B_1B_2 = 2b$;

– Tiêu cự : $F_1F_2 = 2c$ (h.3.5).



Hình 3.5

4. Hình dạng của elip (E) :

– (E) có hai trục đối xứng là Ox, Oy và có tâm đối xứng là gốc toạ độ ;

– Mọi điểm của elip (E) ngoại trừ bốn đỉnh đều nằm trong hình chữ nhật có kích thước $2a$ và $2b$ giới hạn bởi các đường thẳng $x = \pm a$, $y = \pm b$. Hình chữ nhật đó gọi là hình chữ nhật cơ sở của elip.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN



VẤN ĐỀ 1

Lập phương trình chính tắc của một elip khi biết các thành phần đủ để xác định elip đó

1. Phương pháp

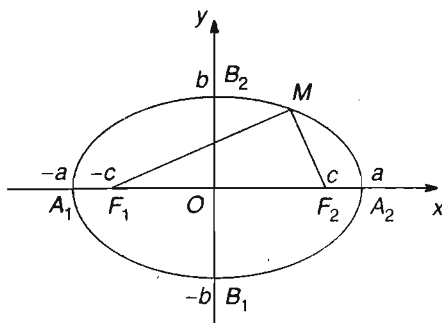
– Từ các thành phần đã biết, áp dụng công thức liên quan ta tìm được phương trình chính tắc của elip.

– Lập phương trình chính tắc của elip theo công thức :

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

– Ta có các hệ thức (h.3.6):

- $0 < b < a$
- $c^2 = a^2 - b^2$



Hình 3.6

- $F_1F_2 = 2c$ (tiêu cự)
- $A_1A_2 = 2a$ (độ dài trục lớn)
- $B_1B_2 = 2b$ (độ dài trục nhỏ)
- $M \in (E) \Leftrightarrow F_1M + F_2M = 2a.$

– Ta có toạ độ các điểm đặc biệt của elip (E) :

- Hai tiêu điểm : $F_1(-c\ ;\ 0), F_2(c\ ;\ 0)$
- Hai đỉnh trên trục lớn : $A_1(-a\ ;\ 0), A_2(a\ ;\ 0)$
- Hai đỉnh trên trục nhỏ : $B_1(0\ ;\ -b), B_2(0\ ;\ b)$.

2. Các ví dụ



Ví dụ 1. Lập phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp sau :

a) Độ dài trục lớn bằng 10 và tiêu cự bằng 6 ;

b) Một tiêu điểm là điểm $\left(-\sqrt{3};\ 0\right)$ và điểm $\left(1\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ nằm trên elip.

GIẢI

a) Ta có $2a = 10$ suy ra $a = 5$, $2c = 6 \Rightarrow c = 3$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16.$$

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) là : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$

b) Phương trình chính tắc của (E) có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Vì (E) có một tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{3};\ 0\right)$ nên $c = \sqrt{3}$. Ta có :

$$\left(1\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in (E) \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \qquad (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 3. \qquad (2)$$

Thế (2) vào (1) ta được $\dfrac{1}{b^2+3}+\dfrac{3}{4b^2}=1 \Leftrightarrow 4b^2+3(b^2+3)=4b^2(b^2+3)$

$$\Leftrightarrow 4b^4+5b^2-9=0 \Leftrightarrow b^2=1.$$

Từ (2) suy ra $a^2=4$.

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) là : $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1.$



Ví dụ 2. Lập phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp sau :

a) Một đỉnh trên trục lớn là điểm (3 ; 0) và một tiêu điểm là điểm (–2 ; 0) ;

b) (E) đi qua hai điểm $M(0 ; 1)$ và $N\left(1 ; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

GIẢI

a) Ta có $a=3$; $c=2$.

Suy ra $b^2=a^2-c^2=9-4=5$.

Vậy phương trình chính tắc của elip là :

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1.$$

b) Phương trình chính tắc của (E) có dạng :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Do (E) đi qua hai điểm $M(0 ; 1)$ và $N\left(1 ; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ nên thay toạ độ của M và N vào phương trình của (E) ta được :

$$\begin{cases}\dfrac{1}{b^2}=1\\[2mm] \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b^2=1\\ a^2=4.\end{cases}$$

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) là : $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1.$



VẤN ĐỀ 2

Xác định các thành phần của một elip khi biết phương trình chính tắc của elip đó

1. Phương pháp

Các thành phần của elip (E) : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (h.3.7) :

– Trục lớn của (E) nằm trên Ox, $A_1A_2 = 2a$;

– Trục nhỏ của (E) nằm trên Oy, $B_1B_2 = 2b$;

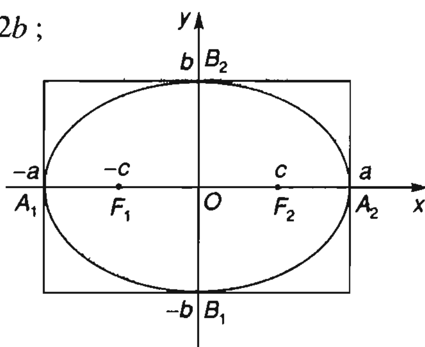
– Hai tiêu điểm : $F_1\ (-c\ ;0)$, $F_2\ (c\ ;0)$

với $c=\sqrt{a^2-b^2}$;

– Tiêu cự : $F_1F_2 = 2c$;

– Bốn đỉnh : $A_1(-a\ ;0)$, $A_2(a\ ;0)$,

$B_1(0\ ;-b)$, $B_2(0\ ;b)$;



Hình 3.7

– Tỉ số $\frac{c}{a}<1$;

– Phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là : $x=\pm a$; $y=\pm b$.

2. Các ví dụ



Ví dụ 1. Xác định độ dài các trục, toạ độ các tiêu điểm, toạ độ các đỉnh và vẽ elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

GIẢI

Phương trình (E) có dạng : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Do đó : $\begin{cases}a^2=25\\ b^2=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=5\\ b=3\end{cases}$

$c=\sqrt{a^2-b^2}=4$.

Vậy (E) có :

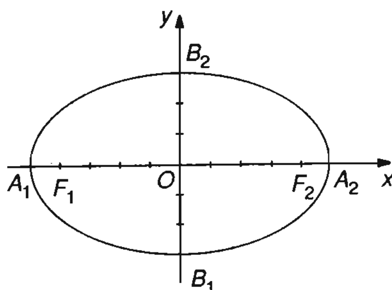
– Trục lớn : $A_1A_2 = 2a = 10$;

– Trục nhỏ : $B_1B_2 = 2b = 6$;

– Hai tiêu điểm : $F_1(-4 ; 0)$, $F_2(4 ; 0)$;

– Bốn đỉnh : $A_1(-5 ; 0)$, $A_2(5 ; 0)$,

$B_1(0 ; -3)$, $B_2(0 ; 3)$.



Hình 3.8

Hình vẽ của (E) như hình 3.8.

 **Ví dụ 2.** Cho elip (E) có phương trình

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Hãy viết phương trình đường tròn ($\mathscr{C}$) có đường kính là F_1F_2 trong đó F_1 và F_2 là hai tiêu điểm của (E).

GIẢI

Phương trình (E) có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ta có $a^2 = 100$, $b^2 = 36$.

Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 64$

$c = 8$.

Đường tròn đường kính F_1F_2 có tâm là gốc toạ độ và có bán kính $R = c = 8$. Vậy phương trình của ($\mathscr{C}$) là : $x^2 + y^2 = 64$.



VẤN ĐỀ 3

Điểm M di động trên một elip

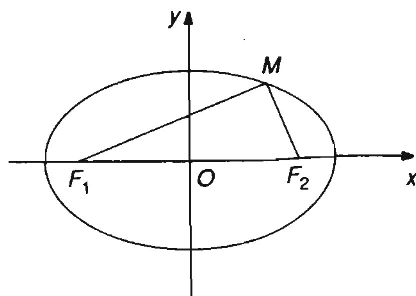
1. Phương pháp

Để chứng tỏ điểm M di động trên một elip ta có hai cách (h.3.9) :

Cách 1 : Chứng minh tổng khoảng cách từ M đến hai điểm cố định F_1, F_2 là một hằng số $2a$ ($F_1F_2 < 2a$).

Khi đó M di động trên elip (E) có hai tiêu điểm F_1, F_2 và trục lớn là $2a$.

Cách 2 : Chứng minh trong mặt phẳng toạ độ Oxy điểm $M(x ; y)$ có toạ độ thoả mãn phương trình



Hình 3.9

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

với a, b là hai hằng số thoả mãn $0 < b < a$.

2. *Các ví dụ*



Ví dụ 1. Cho hai đường tròn $\mathscr{C}_1(F_1 ; R_1)$ và $\mathscr{C}_2(F_2 ; R_2)$. ($\mathscr{C}_1$) nằm trong ($\mathscr{C}_2$) và $F_1 \neq F_2$. Gọi M là tâm của đường tròn ($\mathscr{C}$) thay đổi nhưng luôn tiếp xúc ngoài với ($\mathscr{C}_1$) và tiếp xúc trong với ($\mathscr{C}_2$). Hãy chứng tỏ điểm M di động trên một elip.

GIẢI

Ta có $MF_1 = R + R_1$; $MF_2 = R_2 - R$.

Suy ra $MF_1 + MF_2 = R_1 + R_2$.

Vậy M di động trên elip có hai tiêu điểm là F_1 và F_2 và có trục lớn là $2a = R_1 + R_2$.



Ví dụ 2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $M(x ; y)$ di động có toạ độ luôn thoả mãn

$$\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$$

trong đó t là tham số thay đổi.

Hãy chứng minh điểm M di động trên một elip.

GIẢI

Ta có : $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{5} = \cos t \\ \dfrac{y}{4} = \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{25} = \cos^2 t \\ \dfrac{y^2}{16} = \sin^2 t \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1.$

Vậy M di động trên elip có phương trình là : $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1.$

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

3.28. Viết phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp sau :

a) Độ dài trục nhỏ bằng 12 và tiêu cự bằng 16 ;

b) Một tiêu điểm là (12 ; 0) và điểm (13 ; 0) nằm trên elip.

3.29. Tìm tọa độ các tiêu điểm, các đỉnh, độ dài các trục của mỗi elip có phương trình sau :

a) $4x^2 + 9y^2 = 36$; b) $x^2 + 4y^2 = 4$.

3.30. Cho đường tròn $\mathscr{C}_1(F_1; 2a)$ cố định và một điểm F_2 cố định nằm trong ($\mathscr{C}_1$).

Xét đường tròn di động ($\mathscr{C}$) có tâm M. Cho biết ($\mathscr{C}$) luôn đi qua điểm F_2 và ($\mathscr{C}$) luôn tiếp xúc với ($\mathscr{C}_1$). Hãy chứng tỏ M di động trên một elip.

3.31. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $M(x ; y)$ di động có toạ độ luôn thoả mãn

$$\begin{cases} x = 7\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$$

Trong đó t là tham số. Hãy chứng tỏ M di động trên một elip.

3.32. Viết phương trình chính tắc của elip trong các trường hợp sau :

a) Độ dài trục lớn bằng 26 và tỉ số $\dfrac{c}{a}$ bằng $\dfrac{5}{13}$;

b) Tiêu điểm $F_1(-6 ; 0)$ và tỉ số $\dfrac{c}{a}$ bằng $\dfrac{2}{3}$.

3.33. Viết phương trình chính tắc của elip (E) có hai tiêu điểm là F_1 và F_2 biết

a) (E) đi qua hai điểm $M\left(4\,;\frac{9}{5}\right)$ và $N\left(3\,;\frac{12}{5}\right)$;

b) (E) đi qua $M\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\,;\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ và tam giác MF_1F_2 vuông tại M.

3.34. Cho elip $(E): 9x^2 + 25y^2 = 225$.

a) Tìm toạ độ hai tiêu điểm F_1, F_2 và các đỉnh của (E).

b) Tìm điểm $M \in (E)$ sao cho M nhìn F_1F_2 dưới một góc vuông.

3.35. Cho elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b < a)$. Tính tỉ số $\frac{c}{a}$ trong các trường hợp sau :

a) Trục lớn bằng ba lần trục nhỏ ;

b) Đỉnh trên trục nhỏ nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông ;

c) Khoảng cách giữa đỉnh trên trục nhỏ và đỉnh trên trục lớn bằng tiêu cự.

3.36. Cho elip $(E): 4x^2 + 9y^2 = 36$ và điểm $M(1\,;\,1)$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua M và cắt (E) tại hai điểm A và B sao cho M là trung điểm của AB.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

3.37. Cho ba điểm $A(2\,;\,1)$, $B(0\,;\,5)$, $C(-5\,;\,-10)$.

a) Tìm toạ độ trọng tâm G, trực tâm H và tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Chứng minh I, G, H thẳng hàng.

c) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

3.38. Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = t. \end{cases}$

a) Hai điểm $A(-7\,;\,3)$ và $B(2\,;\,1)$ có nằm trên Δ không ?

b) Tìm toạ độ giao điểm của Δ với hai trục Ox và Oy.

c) Tìm trên Δ điểm M sao cho đoạn BM ngắn nhất.

3.39. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Biết $A(3 ; 0)$, $B(-3 ; 3)$ và phương trình đường thẳng chứa cạnh $CD : x + 2y - 8 = 0$. Tìm phương trình các đường thẳng chứa các cạnh còn lại.

3.40. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $\Delta : x - y + 2 = 0$ và điểm $A(2 ; 0)$.

a) Chứng minh rằng hai điểm A và O nằm về cùng một phía đối với đường thẳng Δ.

b) Tìm điểm M trên Δ sao cho độ dài đường gấp khúc OMA ngắn nhất.

3.41. Cho ba điểm $A(3 ; 5)$, $B(2 ; 3)$ và $C(6 ; 2)$.

a) Viết phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Hãy xác định toạ độ của tâm và bán kính của $(\mathscr{C})$.

3.42. Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2mx - 4(m-2)y + 6 - m = 0$. (1)

a) Tìm điều kiện của m để (1) là phương trình của đường tròn, ta kí hiệu là (C_m).

b) Tìm tập hợp các tâm của (C_m) khi m thay đổi.

3.43. Lập phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp sau :

a) Một đỉnh là $(0 ; -2)$ và một tiêu điểm là $(-1 ; 0)$;

b) Tiêu cự bằng 6, tỉ số $\dfrac{c}{a}$ bằng $\dfrac{3}{5}$.

3.44. Cho elip $(E) : \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng Δ thay đổi có phương trình tổng quát $Ax + By + C = 0$ luôn thoả mãn $25A^2 + 9B^2 = C^2$. Tính tích khoảng cách từ hai tiêu điểm F_1, F_2 của (E) đến đường thẳng Δ.

3.45. Cho elip $(E) : x^2 + 4y^2 = 16$.

a) Xác định toạ độ các tiêu điểm và các đỉnh của elip (E).

b) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M\left(1 ; \dfrac{1}{2}\right)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1 ; 2)$.

c) Tìm toạ độ các giao điểm A và B của đường thẳng Δ và elip (E). Chứng minh $MA = MB$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

3.46. Cho ba điểm $A(1 ; 4)$, $B(3 ; 2)$, $C(5 ; 4)$. Toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

(A) $(2 ; 5)$ (B) $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$

(C) $(9 ; 10)$ (D) $(3 ; 4)$.

3.47. Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = 5 - \frac{1}{2}t \\ y = -3 + 3t. \end{cases}$$

Một vectơ chỉ phương của Δ có toạ độ là

(A) $(-1 ; 6)$ (B) $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$

(C) $(5 ; -3)$ (D) $(-5 ; 3)$

3.48. Lập phương trình đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d : 3x - 2y + 12 = 0$ và cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $AB = \sqrt{13}$. Ta được kết quả là :

(A) $3x - 2y + 12 = 0$; (B) $3x - 2y - 12 = 0$;

(C) $6x - 4y - 12 = 0$; (D) $3x - 4y - 6 = 0$.

3.49. Trong các điểm có toạ độ sau đây, điểm nào nằm trên đường thẳng Δ có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t? \end{cases}$$

(A) $(1 ; 1)$ (B) $(0 ; -2)$

(C) $(1 ; -1)$ (D) $(-1 ; 1)$.

3.50. Đường thẳng đi qua điểm $M(1 ; 2)$ và song song với đường thẳng $d : 4x + 2y + 1 = 0$ có phương trình tổng quát là :

(A) $4x + 2y + 3 = 0$; (B) $2x + y + 4 = 0$;

(C) $2x + y - 4 = 0$; (D) $x - 2y + 3 = 0$.

3.51. Cho đường thẳng d có phương trình tổng quát : $3x + 5y + 2006 = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

(A) d có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3 ; 5)$;

(B) d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (5 ; -3)$;

(C) d có hệ số góc $k = \dfrac{5}{3}$;

(D) d song song với đường thẳng $3x + 5y = 0$.

3.52. Hình chiếu vuông góc của điểm $M(1 ; 4)$ xuống đường thẳng $\Delta : x - 2y + 2 = 0$ có toạ độ là

(A) $(3 ; 0)$; (B) $(0 ; 3)$;

(C) $(2 ; 2)$; (D) $(2 ; -2)$.

3.53. Đường thẳng đi qua hai điểm $A(1 ; 1)$, $B(2 ; 2)$ có phương trình tham số là :

(A) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$; (B) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$;

(C) $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$; (D) $\begin{cases} x = t \\ y = t. \end{cases}$

3.54. Đường tròn (C) có tâm là gốc $O(0 ; 0)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : 8x + 6y + 100 = 0$. Bán kính của đường tròn (C) là :

(A) 4 ; (B) 6 ;

(C) 8 ; (D) 10.

3.55. Góc giữa hai đường thẳng : $\Delta_1 : x + 2y + 4 = 0$

$$\Delta_2 : x - 3y + 6 = 0$$

có số đo là :

(A) 30^o ; (B) 60^o ;

(C) 45^o ; (D) $23^o12'$.

3.56. Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 lần lượt có phương trình $x - y = 0$ và $\sqrt{3}x - y = 0$. Góc giữa Δ_1 và Δ_2 có số đo là

(A) 30^o ; (B) 15^o ;

(C) 45^o ; (D) 75^o.

3.57. Phương trình nào trong các phương trình sau đây không là phương trình đường tròn ?

(A) $x^2 + y^2 - 4 = 0$;

(B) $x^2 + y^2 + x + y + 2 = 0$;

(C) $x^2 + y^2 + x + y = 0$;

(D) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

3.58. Cho 3 điểm $A(-2 ; 0)$, $B(\sqrt{2} ; \sqrt{2})$, $C(2 ; 0)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình là

(A) $x^2 + y^2 - 4 = 0$;

(B) $x^2 + y^2 - 4x + 4 = 0$;

(C) $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$;

(D) $x^2 + y^2 = 2$.

3.59. Cho hai điểm $A(3 ; 0)$, $B(0 ;4)$. Đường tròn nội tiếp tam giác OAB có phương trình là

(A) $x^2 + y^2 = 1$;

(B) $x^2 + y^2 = 2$;

(C) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$;

(D) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$.

3.60. Cho hai đường tròn :

$(C_1) : x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$

$(C_2) : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.

Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau :

(A) (C_1) cắt (C_2) ;

(B) (C_1) không có điểm chung với (C_2) ;

(C) (C_1) tiếp xúc trong với (C_2) ;

(D) (C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2).

3.61. Tiếp tuyến với đường tròn (C) : $x^2 + y^2 = 2$ tại điểm $M_0(1 ; 1)$ có phương trình là :

(A) $x + y - 2 = 0$; (B) $x + y + 1 = 0$;

(C) $2x + y - 3 = 0$; (D) $x - y = 0$.

3.62. Số đường thẳng đi qua điểm $M(5 ; 6)$ và tiếp xúc với đường tròn

(C) : $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ là

(A) 0 (B) 1

(C) 2 (D) 3.

3.63. Có bao nhiêu tiếp tuyến với đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 8x - 4y = 0$ đi qua gốc toạ độ ?

(A) 0 (B) 1

(C) 2 (D) 3.

3.64. Cho elip (E) có hai tiêu điểm là F_1, F_2 và có độ dài trục lớn bằng $2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) $2a = F_1F_2$; (B) $2a > F_1F_2$;

(C) $2a < F_1F_2$; (D) $4a = F_1F_2$.

3.65. Một elip (E) có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Gọi $2c$ là tiêu cự của (E). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) $c^2 = a^2 + b^2$; (B) $b^2 = a^2 + c^2$;

(C) $a^2 = b^2 + c^2$; (D) $c = a + b$.

3.66. Cho điểm $M(2 ; 3)$ nằm trên đường elip (E) có phương trình chính tắc : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Trong các điểm sau đây điểm nào không nằm trên elip (E) :

(A) $M_1(-2 ; 3)$ (B) $M_2(2 ; -3)$

(C) $M_3(-2 ; -3)$ (D) $M_4(3 ; 2)$.

3.67. Cho elip (E) có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$. Trong các điểm có toạ độ sau đây điểm nào là tiêu điểm của elip (E) ?

(A) $(10 ; 0)$ (B) $(6 ; 0)$

(C) $(4 ; 0)$ (D) $(-8 ; 0)$.

3.68. Cho elip (E) có tiêu điểm là $F_1(4 ; 0)$ và có một đỉnh là $A(5 ; 0)$. Phương trình chính tắc của (E) là

(A) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; (B) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$;

(C) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; (D) $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=1$.

3.69. Elip (E) : $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ và đường tròn (C) : $x^2+y^2=25$ có bao nhiêu điểm chung ?

(A) 0 ; (B) 1 ;

(C) 2 ; (D) 4.

3.70. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ và đường thẳng $\Delta : y = 3$. Tích các khoảng cách từ hai tiêu điểm của (E) đến Δ bằng giá trị nào sau đây ?

(A) 16 ; (B) 9 ;

(C) 81 ; (D) 7.

3.71. Đường tròn đi qua ba điểm $A(0 ; 3)$; $B(-3 ; 0)$ và $C(3 ; 0)$ có phương trình là

(A) $x^2+y^2=3$; (B) $x^2+y^2-6x-6y+9=0$;

(C) $x^2+y^2-6x+6y=0$; (D) $x^2+y^2-9=0$.

3.72. Với giá trị nào của m thì đường thẳng $\Delta : \frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y+m=0$ tiếp xúc với đường tròn $x^2+y^2=1$?

(A) $m=1$; (B) $m=0$;

(C) $m=\sqrt{2}$; (D) $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

§1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

3.1. a) $\begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = -2 - 3t. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = \sqrt{3} + 2t \\ y = 1 + 3t. \end{cases}$

3.2. a) $M(2 + 2t\ ;\ 3 + t) \in \Delta$.

$AM = 5 \Leftrightarrow (2 + 2t)^2 + (2 + t)^2 = 25$

$\Leftrightarrow 5t^2 + 12t - 17 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -\frac{17}{5}$.

Vậy M có toạ độ là $(4\ ;\ 4)$ hay $\left(\frac{-24}{5}\ ;\ \frac{-2}{5}\right)$.

b) $M(2 + 2t\ ;\ 3 + t) \in \Delta$

$d: x + y + 1 = 0$

$M \in d \Leftrightarrow 2 + 2t + 3 + t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -2$.

Vậy M có toạ độ là $(-2\ ;\ 1)$.

c) $M(2 + 2t\ ;\ 3 + t) \in \Delta$

$\overrightarrow{AM} = (2 + 2t\ ;\ 2 + t)$, $\vec{u}_\Delta = (2\ ;\ 1)$

Ta có : AM ngắn nhất $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{u}_\Delta$

$\Leftrightarrow 2(2 + 2t) + (2 + t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{6}{5}$. Vậy M có toạ độ là $\left(-\frac{2}{5}\ ;\ \frac{9}{5}\right)$.

3.3. a) $3x - 2y - 1 = 0$;

b) $y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Leftrightarrow x + 2y = 0$;

c) $3x - 2y - 6 = 0$.

3.4. Gọi Δ_1, Δ_2, Δ_3 lần lượt là các đường trung trực đi qua M, N, P.

Ta có : $\vec{n}_{\Delta_1} = \overrightarrow{NP} = (-2\ ;\ 3)$.

Vậy Δ_1 có phương trình $-2(x+1)+3y=0 \Leftrightarrow 2x-3y+2=0$.

Ta có $\vec{n}_{\Delta_2} = \overrightarrow{MP} = (3\ ;\ 4)$.

Vậy Δ_2 có phương trình $3(x-4)+4(y-1)=0 \Leftrightarrow 3x+4y-16=0$.

Ta có $\vec{n}_{\Delta_3} = \overrightarrow{MN} = (5\ ;\ 1)$.

Vậy Δ_3 có phương trình $5(x-2)+(y-4)=0 \Leftrightarrow 5x+y-14=0$.

3.5. *Trường hợp 1 :* $a \neq 0$ và $b \neq 0$

Phương trình Δ có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Ta có $|a|=|b|$.

• $b = a$

Δ có dạng : $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$.

$M \in \Delta \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{2}{a}=1 \Leftrightarrow a=3$.

Vậy Δ : $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1 \Leftrightarrow x+y-3=0$.

• $b = -a$

Δ có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$.

$M \in \Delta \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{2}{-a}=1 \Leftrightarrow a=-1$.

Vậy Δ : $\frac{x}{-1}+\frac{y}{1}=1 \Leftrightarrow x-y+1=0$.

Trường hợp 2 : $b = a = 0$

Δ đi qua M và O nên có phương trình $2x-y=0$.

3.6. Theo đề bài toạ độ của điểm A luôn thoả mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} x-3y=-11 \\ 3x+7y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=3. \end{cases}$$

Vì $AC \perp BH$ nên AC có dạng $5x + 3y + c = 0$, ta có :

$$A \in AC \Leftrightarrow -10 + 9 + c = 0 \Leftrightarrow c = 1.$$

Vậy phương trình đường thẳng chứa cạnh AC : $5x + 3y + 1 = 0$.

Toạ độ của điểm B luôn luôn thoả mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - 3y = -11 \\ 3x - 5y = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5. \end{cases}$$

Vì $BC \perp AH$ nên BC có dạng $7x - 3y + c = 0$, ta có :

$$B \in BC \Leftrightarrow 28 - 15 + c = 0 \Leftrightarrow c = -13.$$

Vậy phương trình đường thẳng chứa cạnh BC : $7x - 3y - 13 = 0$.

3.7. Hai đường trung tuyến đã cho đều không phải là đường trung tuyến xuất phát từ A vì toạ độ của A không thoả mãn các phương trình của chúng. Đặt BM : $2x - y + 1 = 0$ và $CN : x + y - 4 = 0$ là hai trung tuyến của tam giác ABC.

Đặt $B(x ; y)$, ta có $N\left(\dfrac{x-2}{2} ; \dfrac{y+3}{2}\right)$ và

$$\begin{cases} B \in BM \\ N \in CN \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ \dfrac{x-2}{2} + \dfrac{y+3}{2} - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5. \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng chứa cạnh AB là : $2x - 4y + 16 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x - 2y + 8 = 0.$$

Tương tự ta có phương trình đường thẳng chứa cạnh AC là : $2x + 5y - 11 = 0$.

Phương trình đường thẳng chứa cạnh BC là : $4x + y - 13 = 0$.

3.8. Δ_1 và Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\overrightarrow{n_1} = (m ; 1)$

$$\overrightarrow{n_2} = (1 ; -1).$$

Ta có : $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0$

$\Leftrightarrow m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow m = 1.$

3.9. a) Đưa phương trình của d và d' về dạng tổng quát

$d: 4x + 5y - 6 = 0$

$d': 4x + 5y + 14 = 0$

$\frac{4}{4} = \frac{5}{5} \neq \frac{-6}{14}$. Vậy $d \parallel d'$.

b) $d: x + 2y - 5 = 0$

$d': 2x + 4y - 10 = 0$

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-5}{-10}$. Vậy $d \equiv d'$.

c) $d: x + y - 2 = 0$

$d': 2x + y - 3 = 0$

$\frac{1}{2} \neq \frac{1}{1}$. Vậy d cắt d'.

3.10. $\cos(\widehat{d_1, d_2}) = \frac{|2-2|}{\sqrt{1+4}\sqrt{4+1}} = 0$. Vậy $(\widehat{d_1, d_2}) = 90^\circ$.

3.11. $R = d(I, \Delta) = \frac{|4 - 15 + 1|}{\sqrt{16+9}} = 2.$

3.12. Phương trình hai đường phân giác của các góc giữa Δ_1 và Δ_2 là :

$$\frac{2x+4y+7}{\sqrt{4+16}} = \pm\frac{x-2y-3}{\sqrt{1+4}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+4y+7 = 2(x-2y-3) \\ 2x+4y+7 = -2(x-2y-3) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8y+13=0 \\ 4x+1=0. \end{array}\right.$$

3.13. $d(M, \Delta_1) = d(M, \Delta_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{|5x+3y-3|}{\sqrt{25+9}} = \frac{|5x+3y+7|}{\sqrt{25+9}} \Leftrightarrow 5x + 3y + 2 = 0.$$

3.14. Ta tìm được đường thẳng d_1 đi qua M có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}$ và đường thẳng d_2 đi qua M và trung điểm của AB.

$d_1 : x - 3y + 13 = 0$

$d_2 : x - 2 = 0.$

§2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

3.15. a) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$; b) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$;

c) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$; d) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$;

e) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$.

3.16. a) Phương trình của ($\mathscr{C}$) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. Ta có : $A, B, C \in (\mathscr{C})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a - 8b + c = -17 \\ 14a - 8b + c = -65 \\ -4a + 10b + c = -29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -1 \\ c = -31. \end{cases}$$

Vậy phương trình của ($\mathscr{C}$) là : $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 31 = 0$.

b) ($\mathscr{C}$) có tâm là điểm $(-3 ; -1)$ và có bán kính bằng $\sqrt{a^2 + b^2 - c} = \sqrt{41}$.

3.17. a) Gọi I $(a ; b)$ là tâm của ($\mathscr{C}$) ta có :

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ I \in \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2 + (b-2)^2 = (a+2)^2 + (b-3)^2 \\ 3a - b + 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2b = -8 \\ 3a - b = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 1. \end{cases}$$

Vậy ($\mathscr{C}$) có tâm $I(-3 ; 1)$.

b) $R = IA = \sqrt{(-1+3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5}$.

c) Phương trình của ($\mathscr{C}$) là : $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 5$.

3.18. a) $x - y - 7 = 0$ (d) hay $x + y - \frac{9}{7} = 0$ (d').

b) $I_1\left(\frac{8}{3} ; -\frac{13}{3}\right)$, $I_2\left(-\frac{2}{7} ; \frac{11}{7}\right)$.

c) $(\mathscr{C}_1): \left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{13}{3}\right)^2 = \left(\frac{31}{15}\right)^2$

$(\mathscr{C}_2): \left(x + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{7}\right)^2 = \left(\frac{31}{35}\right)^2$.

3.19. $(\mathscr{C}_1): x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$

$(\mathscr{C}_2): x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0.$

3.20. a) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$;

b) $x^2 + y^2 - x + y - 4 = 0.$

3.21. Phương trình của $(\mathscr{C})$ có dạng $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$, ta có :

$M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow (4-a)^2 + (2-a)^2 = a^2$

$\Leftrightarrow a^2 - 12a + 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = 10. \end{array}\right.$

Vậy có hai đường tròn thoả mãn đề bài là :

$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ và $(x-10)^2 + (y-10)^2 = 100.$

3.22. a) $M_1(1 ; 0)$, $M_2(-3 ; 3)$.

b) $\Delta_1 : x - 7y - 1 = 0$; $\Delta_2 : 7x + y + 18 = 0.$

c) $A\left(-\frac{5}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$.

3.23. a) $(\mathscr{C})$ có tâm $I(3 ; -1)$ và có bán kính $R = 2$, ta có :

$$IA = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-3)^2} = 2\sqrt{5}$$

$IA > R$, vậy A nằm ngoài $(\mathscr{C})$.

b) $\Delta_1 : 3x + 4y - 15 = 0$; $\Delta_2 : x - 1 = 0$.

3.24. Δ vuông góc với d nên phương trình Δ có dạng : $x + 3y + c = 0$.

($\mathscr{C}$) có tâm $I(3 ; -1)$ và có bán kính $R = \sqrt{10}$. Ta có :

Δ tiếp xúc với ($\mathscr{C}$) $\Leftrightarrow d(I ; \Delta) = R \Leftrightarrow \dfrac{|3-3+c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow c = \pm 10$.

Vậy có hai tiếp tuyến thoả mãn đề bài là :

$\Delta_1 : x + 3y + 10 = 0$ và $\Delta_2 : x + 3y - 10 = 0$.

3.25. a) ($\mathscr{C}$) có tâm $I(-1 ; 2)$ và có bán kính $R = 3$. Đường thẳng Δ đi qua $M(2 ; -1)$ và có hệ số góc k có phương trình :

$$y + 1 = k(x - 2) \Leftrightarrow kx - y - 2k - 1 = 0.$$

Ta có : Δ tiếp xúc với ($\mathscr{C}$) $\Leftrightarrow d(I, \Delta) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|-k-2-2k-1|}{\sqrt{k^2+1}} = 3$$

$$\Leftrightarrow |k+1| = \sqrt{k^2+1}$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 2k + 1 = k^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow k = 0.$$

Vậy ta được tiếp tuyến $\Delta_1 : y + 1 = 0$.

Xét đường thẳng Δ_2 đi qua $M(2 ; -1)$ và vuông góc với Ox, Δ_2 có phương trình $x - 2 = 0$. Ta có $d(I, \Delta_2) = |-1-2| = 3 = R$.

Suy ra Δ_2 tiếp xúc với ($\mathscr{C}$).

Vậy qua điểm M ta vẽ được hai tiếp tuyến với ($\mathscr{C}$), đó là :

$\Delta_1 : y + 1 = 0$ và $\Delta_2 : x - 2 = 0$.

b) Δ_1 tiếp xúc với ($\mathscr{C}$) tại $M_1(-1 ; -1)$

Δ_2 tiếp xúc với ($\mathscr{C}$) tại $M_2\,(2 ; 2)$.

Phương trình của đường thẳng d đi qua M_1 và M_2 là : $x - y = 0$.

3.26. Đường tròn $(\mathscr{C}): x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ có tâm $I(4\,;3)$ và có bán kính $R = 5$.

Cách 1 : Xét đường thẳng Δ đi qua gốc toạ độ O và có hệ số góc k, Δ có phương trình $y - kx = 0$.

Ta có : Δ tiếp xúc với $(\mathscr{C}) \Leftrightarrow d(I, \Delta) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|3-4k|}{\sqrt{k^2+1}} = 5$$

$$\Leftrightarrow (3 - 4k)^2 = 25(k^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 9 + 16k^2 - 24k = 25k^2 + 25$$

$$\Leftrightarrow 9k^2 + 24k + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{4}{3}.$$

Vậy ta được phương trình tiếp tuyến là : $y + \frac{4}{3}x = 0$ hay $4x + 3y = 0$.

Cách 2 : Do toạ độ $O(0\,;0)$ thoả mãn phương trình của $(\mathscr{C})$ nên điểm O nằm trên $(\mathscr{C})$. Tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ tại O có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{OI} = (4\,;3)$.

Suy ra Δ có phương trình

$$4x + 3y = 0.$$

3.27. a) $(\mathscr{C}_1)$ có tâm $I_1\,(3\,;0)$ và có bán kính $R_1 = 2$;

$(\mathscr{C}_2)$ có tâm $I_2\,(6\,;3)$ và có bán kính $R_2 = 1$.

b) Xét đường thẳng Δ có phương trình :

$y = kx + m$ hay $kx - y + m = 0$. Ta có :

Δ tiếp xúc với $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} d(I_1, \Delta) = R_1 \\ d(I_2, \Delta) = R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|3k+m|}{\sqrt{k^2+1}} = 2 & (1) \\ \dfrac{|6k-3+m|}{\sqrt{k^2+1}} = 1. & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$|3k + m| = 2|6k - 3 + m|.$$

Trường hợp 1. $3k + m = 2(6k - 3 + m) \Leftrightarrow m = 6 - 9k.$ (3)

Thay vào (2) ta được

$$|6k - 3 + 6 - 9k| = \sqrt{k^2 + 1} \Leftrightarrow |3 - 3k| = \sqrt{k^2 + 1}$$
$$\Leftrightarrow 9 - 18k + 9k^2 = k^2 + 1$$
$$\Leftrightarrow 8k^2 - 18k + 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4k^2 - 9k + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = \dfrac{9 + \sqrt{17}}{8} \\ k_2 = \dfrac{9 - \sqrt{17}}{8}. \end{array}\right.$$

Thay giá trị của k vào (3) ta tính được

$$\left[\begin{array}{l} m_1 = 6 - 9k_1 \\ m_2 = 6 - 9k_2. \end{array}\right.$$

Vậy ta được hai tiếp tuyến

$$\Delta_1 : y = k_1x + 6 - 9k_1$$
$$\Delta_2 : y = k_2x + 6 - 9k_2.$$

Trường hợp 2. $3k + m = -2(6k - 3 + m) \Leftrightarrow 3m = 6 - 15k$

$\Leftrightarrow m = 2 - 5k.$ (4)

Thay vào (2) ta được

$$|6k - 3 + 2 - 5k| = \sqrt{k^2 + 1} \Leftrightarrow |k - 1| = \sqrt{k^2 + 1}$$
$$\Leftrightarrow (k - 1)^2 = k^2 + 1$$
$$\Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 = k^2 + 1$$
$$\Leftrightarrow k = 0.$$

Thay giá trị của k vào (4) ta được $m = 2$.

Vậy ta được tiếp tuyến

$$\Delta_3 : y = 2.$$

Xét đường thẳng Δ_4 vuông góc với Ox tại x_0 :

$$\Delta_4 : x - x_0 = 0.$$

Δ_4 tiếp xúc với ($\mathscr{C}_1$) và ($\mathscr{C}_2$) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} d(I_1, \Delta_4) = R_1 \\ d(I_2, \Delta_4) = R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3 - x_0| = 2 \\ |6 - x_0| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \vee x_0 = 5 \\ x_0 = 5 \vee x_0 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = 5.$$

Vậy ta được tiếp tuyến

$$\Delta_4 : x - 5 = 0.$$

Tóm lại hai đường tròn ($\mathscr{C}_1$) và ($\mathscr{C}_2$) có bốn tiếp tuyến chung $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ và Δ_4.

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ELIP

3.28. a) $(E) : \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$; b) $(E) : \dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{25} = 1$.

3.29. a) $(E) : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

– Hai tiêu điểm : $F_1(-\sqrt{5} ; 0)$, $F_2(\sqrt{5} ; 0)$.

– Bốn đỉnh : $A_1(-3 ; 0)$, $A_2(3 ; 0)$, $B_1(0 ; -2)$, $B_2(0 ; 2)$.

– Trục lớn : $A_1A_2 = 6$.

– Trục nhỏ : $B_1B_2 = 4$.

b) $(E) : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$.

– Hai tiêu điểm : $F_1(-\sqrt{3} ; 0)$, $F_2(\sqrt{3} ; 0)$.

– Bốn đỉnh : $A_1(-2 ; 0)$, $A_2(2 ; 0)$, $B_1(0 ; -1)$, $B_2(0 ; 1)$.

– Trục lớn : $A_1A_2 = 4$.

– Trục nhỏ : $B_1B_2 = 2$.

3.30. $\mathscr{C}(M ; R)$ đi qua $F_2 \Rightarrow MF_2 = R$ (1)

$\mathscr{C}(M ; R)$ tiếp xúc trong với $\mathscr{C}_1(F_1 ; 2a) \Rightarrow MF_1 = 2a - R$ (2)

(1) + (2) cho : $MF_1 + MF_2 = 2a$.

Vậy M di động trên elip (E) có hai điểm là F_1, F_2 và trục lớn $2a$.

3.31. Điểm M di động trên elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$.

3.32. a) Ta có : $2a = 26 \Rightarrow a = 13$ và :

$$\frac{c}{a} = \frac{c}{13} = \frac{5}{13} \Rightarrow c = 5.$$

Do đó $\quad b^2 = a^2 - c^2 = 169 - 25 = 144.$

Vậy phương trình chính tắc của elip là

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1.$$

b) Elip có tiêu điểm $F_1(-6 ; 0)$ suy ra $c = 6$. Vậy :

$$\frac{c}{a} = \frac{6}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 9.$$

Do đó : $\quad b^2 = a^2 - c^2 = 81 - 36 = 45.$

Vậy phương trình chính tắc của elip là

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{45} = 1.$$

3.33. a) Xét elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(E) đi qua $M\left(4 ; \frac{9}{5}\right)$ và $N\left(3 ; \frac{12}{5}\right)$ nên thay toạ độ của M và N vào phương trình của (E) ta được :

$$\begin{cases} \frac{16}{a^2} + \frac{81}{25b^2} = 1 \\ \frac{9}{a^2} + \frac{144}{25b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9. \end{cases}$$

Vậy phương trình của (E) là : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

b) Xét elip $(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Vì $M\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}};\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)\in(E)$ nên $\dfrac{9}{5a^2}+\dfrac{16}{5b^2}=1$. (1)

Ta có : $\widehat{F_1MF_2}=90^\circ \Rightarrow OM=OF_1$

$$\Rightarrow c^2=OM^2=\frac{9}{5}+\frac{16}{5}=5$$

và $a^2=b^2+c^2=b^2+5$.

Thay vào (1) ta được :

$$\frac{9}{5(b^2+5)}+\frac{16}{5b^2}=1 \Leftrightarrow 9b^2+16(b^2+5)=5b^2(b^2+5)$$

$$\Leftrightarrow b^4=16$$

$$\Leftrightarrow b^2=4.$$

Suy ra $a^2=9$.

Vậy phương trình chính tắc của (E) là

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

3.34. $(E): 9x^2+25y^2=225 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

a) Ta có : $a^2=25, b^2=9$

$\Rightarrow a=5, \quad b=3.$

Ta có : $c^2=a^2-b^2=16$

$\Rightarrow c=4.$

Vậy (E) có hai tiêu điểm là : $F_1(-4;0)$ và $F_2(4;0)$ và có bốn đỉnh là $A_1(-5;0)$, $A_2(5;0)$, $B_1(0;-3)$ và $B_2(0;3)$.

b) Gọi $M(x;y)$ là điểm cần tìm, ta có :

$$\begin{cases} M\in(E)\\ \widehat{F_1MF_2}=90^\circ\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M\in(E)\\ OM^2=c^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2+25y^2=225\\ x^2+y^2=16\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{175}{16} \\ y^2 = \dfrac{81}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{5\sqrt{7}}{4} \\ y = \pm\dfrac{9}{4}. \end{cases}$$

Vậy có bốn điểm M thoả mãn điều kiện của đề bài là :

$$\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}\,;\,\frac{9}{4}\right);\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}\,;\,-\frac{9}{4}\right),\left(-\frac{5\sqrt{7}}{4}\,;\,\frac{9}{4}\right),\left(-\frac{5\sqrt{7}}{4}\,;\,-\frac{9}{4}\right).$$

3.35. a) Ta có : $a = 3b \Rightarrow a^2 = 9b^2$

$$\Rightarrow a^2 = 9(a^2 - c^2)$$
$$\Rightarrow 9c^2 = 8a^2$$
$$\Rightarrow 3c = 2\sqrt{2}a.$$

Vậy $\dfrac{c}{a} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

b) $\widehat{F_1B_1F_2} = 90^\circ \Rightarrow OB_1 = \dfrac{F_1F_2}{2}$

$$\Rightarrow b = c$$
$$\Rightarrow b^2 = c^2$$
$$\Rightarrow a^2 - c^2 = c^2$$
$$\Rightarrow a^2 = 2c^2$$
$$\Rightarrow a = c\sqrt{2}.$$

Vậy $\dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

c) $A_1B_1 = 2c \Rightarrow A_1B_1^2 = 4c^2$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 4c^2$$
$$\Rightarrow a^2 + a^2 - c^2 = 4c^2$$
$$\Rightarrow 2a^2 = 5c^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{2}a = \sqrt{5}c.$$

Vậy $\dfrac{c}{a} = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$.

3.36. $(E): 4x^2 + 9y^2 = 36.$ (1)

Xét đường thẳng (d) đi qua điểm $M(1\ ;\ 1)$ và có hệ số góc k. Ta có phương trình của (d) : $y - 1 = k(x-1)$ hay $y = k(x-1)+1.$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được

$$4x^2 + 9\,[k(x-1)+1]^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow\ (9k^2+4)x^2 + 18k(1-k)x + 9(1-k)^2 - 36 = 0. \quad (3)$$

Ta có : (d) cắt (E) tại hai điểm A, B thoả mãn

$MA = MB$ khi và chỉ khi phương trình (3) có hai nghiệm x_A, x_B sao cho :

$$\frac{x_A + x_B}{2} = x_M \Leftrightarrow \frac{-18k(1-k)}{2(9k^2+4)} = 1$$

$$\Leftrightarrow 18k^2 - 18k = 18k^2 + 8 \Leftrightarrow k = -\frac{4}{9}.$$

Vậy phương trình của (d) là :

$$y = -\frac{4}{9}(x-1)+1 \quad \text{hay} \quad 4x + 9y - 13 = 0.$$

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

3.37. a) $G\left(-1\ ;\ -\frac{4}{3}\right)$, $H(11\ ;\ -2)$, $I(-7\ ;\ -1)$.

b) $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG}$ suy ra I, G, H thẳng hàng.

c) $(x+7)^2 + (y+1)^2 = 85$.

3.38. a) $A \in \Delta$; $B \notin \Delta$.

b) Δ cắt Ox tại $M(2\ ;\ 0)$

Δ cắt Oy tại $N\left(0\ ;\ \frac{2}{3}\right)$.

c) Vì $M \in \Delta$ nên toạ độ của M có dạng $(2 - 3t\ ;\ t)$

$$\overrightarrow{BM} = (-3t\ ;\ t-1)$$

$$\vec{u}_\Delta = (-3\ ;\ 1).$$

Ta có : BM ngắn nhất $\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \perp \vec{u}_{\Delta} \Leftrightarrow 9t + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{10}$.

Vậy điểm M thoả mãn đề bài có toạ độ là $\left(\frac{17}{10} ; \frac{1}{10}\right)$.

3.39. $x + 2y - 3 = 0$;

$2x - y - 6 = 0$;

$2x - y + 9 = 0$.

3.40. a) Ta có $\Delta(O) = 2 > 0$

$\Delta(A) = 2 + 2 > 0$.

Vậy A và O nằm về cùng một phía đối với Δ (h.3.10).

b) Gọi O' là điểm đối xứng của O qua Δ, ta có :

$OM + MA = O'M + MA \geq O'A$

Ta có : $OM + MA$ ngắn nhất

$\Leftrightarrow O', M, A$ thẳng hàng.

Hình 3.10

Xét đường thẳng d đi qua O và vuông góc với Δ. Phương trình của d là :

$$x + y = 0.$$

d cắt Δ tại $H(-1 ; 1)$.

H là trung điểm của OO', suy ra $O'(-2 ; 2)$.

Phương trình đường thẳng $O'A$ là : $x + 2y - 2 = 0$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - y = -2 \end{cases}$ ta được $M = \left(-\frac{2}{3} ; \frac{4}{3}\right)$.

3.41. a) $(\mathscr{C})$: $x^2 + y^2 - \frac{25}{3}x - \frac{19}{3}y + \frac{68}{3} = 0$.

b) $(\mathscr{C})$ có tâm $I\left(\frac{25}{6} ; \frac{19}{6}\right)$ và có bán kính $R = \sqrt{\frac{85}{18}}$.

3.42. a) (1) là phương trình của đường tròn khi và chỉ khi

$$a^2 + b^2 - c > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4(m-2)^2 - 6 + m > 0$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 - 15m + 10 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 2. \end{array}\right.$$

b) (C_m) có tâm $I(x\,;\,y)$ thoả mãn $\begin{cases} x = m \\ y = 2(m-2) \end{cases} \Leftrightarrow y = 2x - 4.$

Vậy tập hợp các tâm của (C_m) là một phần của đường thẳng $\Delta : y = 2x - 4$ thoả mãn điều kiện giới hạn : $x < 1$ hay $x > 2$.

3.43. a) $(E) : \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$;

b) $(E) : \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1.$

3.44. $(E) : \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1.$

Ta có : $a^2 = 25, b^2 = 9 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 16$

$$\Rightarrow c = 4.$$

Vậy (E) có hai tiêu điểm là $F_1(-4\,;\,0)$ và $F_2(4\,;\,0)$. Ta có :

$$d_1 = d(F_1, \Delta) = \frac{|-4A + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d_2 = d(F_2, \Delta) = \frac{|4A + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Suy ra $d_1.d_2 = \dfrac{|C^2 - 16A^2|}{A^2 + B^2}.$ (1)

Thay $C^2 = 25A^2 + 9B^2$ vào (1) ta được :

$$d_1.d_2 = \frac{|25A^2 + 9B^2 - 16A^2|}{A^2 + B^2} = \frac{9(A^2 + B^2)}{A^2 + B^2}.$$

Vậy $d_1.d_2 = 9.$

3.45. $(E): \quad x^2 + 4y^2 = 16 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$

Ta có $a^2 = 16$, $b^2 = 4 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 12$

$$\Rightarrow c = 2\sqrt{3}.$$

Vậy (E) có hai tiêu điểm : $F_1(-2\sqrt{3}\ ; 0)$ và $F_2(2\sqrt{3}\ ; 0)$

và các đỉnh $A_1(-4\ ; 0)$, $A_2(4\ ; 0)$

$B_1(0\ ; -2)$, $B_2(0\ ; 2)$.

b) Phương trình Δ có dạng :

$$1(x-1) + 2\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{hay} \quad x + 2y - 2 = 0.$$

c) Toạ độ của giao điểm của Δ và (E) là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 16 & (1) \\ x = 2 - 2y. & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được :

$$(2 - 2y)^2 + 4y^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - y)^2 + y^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 2y^2 - 2y - 3 = 0. \qquad (3)$$

Phương trình (3) có hai nghiệm y_A, y_B thoả mãn

$$\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = y_M.$$

Vậy $\quad MA = MB$.

Ta có $y_A = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$, $y_B = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$

$x_A = 1 + \sqrt{7}$, $x_B = 1 - \sqrt{7}$.

Vậy A có toạ độ là $\left(1+\sqrt{7}\ ;\ \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$, B có toạ độ là $\left(1-\sqrt{7}\ ;\ \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$.

3.46. $\overrightarrow{BA} = (-2\ ;\ 2)$

$\overrightarrow{BC} = (2\ ;\ 2)$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \widehat{ABC} = 90^\circ$.

Đường tròn ngoại tiếp có tâm là trung điểm I của AC nên có toạ độ (3 ; 4). Chọn (D).

3.47. Chọn (A).

3.48. Đường thẳng $\Delta : 6x - 4y - 12 = 0$ cắt Ox và Oy lần lượt tại $A(2\ ;\ 0)$ và $B(0\ ;\ -3)$.

Ta có $AB = \sqrt{13}$. Chọn (C).

3.49. Chọn (A).

3.50. Đường thẳng $\Delta : 2x + y - 4 = 0$ song song với đường thẳng $d : 4x + 2y + 1 = 0$ và đi qua điểm $M(1\ ;\ 2)$. Chọn (C).

3.51. Đường thẳng $\Delta : 3x + 5y + 2006 = 0$ có hệ số góc là $k = -\dfrac{3}{5}$. Phát biểu (C) sai. Chọn (C).

3.52. Điểm $C(2\ ;\ 2)$ có toạ độ thoả mãn phương trình đường thẳng $\Delta : x - 2y + 2 = 0$. Ta lại có $\overrightarrow{MC} = (1\ ;\ -2)$, $\overrightarrow{n_\Delta} = (1\ ;\ -2)$ suy ra MC vuông góc với Δ. Vậy $C(2\ ;\ 2)$ là hình chiếu vuông góc của M xuống Δ. Chọn (C).

3.53. Đường thẳng Δ đi qua $A(1\ ;\ 1)$, $B(2\ ;\ 2)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (1\ ;\ 1)$.

Vậy Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t. \end{cases}$

Điểm $O(0\ ;\ 0)$ thoả mãn phương trình của Δ (ứng với $t = -1$). Vậy phương trình tham số của Δ có thể viết là $\begin{cases} x = t \\ y = t. \end{cases}$

Chọn (D).

3.54. $R = d(O\ ;\ \Delta) = \dfrac{100}{\sqrt{64+36}} = 10$.

Chọn (D).

3.55. $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{|1-6|}{\sqrt{1+4}\sqrt{1+9}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Chọn (C).

3.56. $(Ox, \Delta_1) = 45^\circ$, $(Ox, \Delta_2) = 60^\circ$. Suy ra $(\Delta_1, \Delta_2) = 15^\circ$. Chọn (B).

3.57. Phương trình $x^2 + y^2 + x + y + 2 = 0$ không là phương trình của đường tròn vì không thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 - c > 0$. Chọn (B).

3.58. Toạ độ ba điểm $A(-2 ; 0)$, $B(\sqrt{2} ; \sqrt{2})$, $C(2 ; 0)$ đều thoả mãn phương trình đường tròn $x^2 + y^2 = 4$. Chọn (A).

3.59. Đường tròn nội tiếp tam giác OAB có tâm $I(a ; a)$. Ta có $d(I, AB) = d(I, Ox)$ suy ra $I(1 ; 1)$. Ta có $R = d(I, Ox) = 1$.
Vậy phương trình của đường tròn nội tiếp tam giác OAB là :

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

Chọn (C).

3.60. (C_1) có tâm $I_1(-1 ; 3)$ và bán kính $R_1 = 2$.
(C_2) có tâm $I_2(2 ; -1)$ và bán kính $R_2 = 3$.
Ta có $I_1I_2 = R_1 + R_2$.

Vậy (C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2).
Chọn (D).

3.61. Tiếp tuyến Δ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{OM_0} = (1 ; 1)$.

Phương trình Δ có dạng

$1.(x - 1) + 1.(y - 1) = 0$

hay $x + y - 2 = 0$. Chọn (A).

3.62. $IM > R$ suy ra điểm M nằm ngoài đường tròn. Chọn (C).

3.63. Đường tròn (C) đi qua gốc $O(0 ; 0)$. Chọn (B).

3.64. Chọn (B).

3.65. Chọn (C).

3.66. (E) đi qua các điểm M_1, M_2, M_3. Chọn (D).

3.67. Chọn (D).

3.68. Chọn (C).

3.69. (C) tiếp xúc với (E) tại $A_1(-5\ ;\ 0)$ và $A_2(5\ ;\ 0)$. Chọn (C).

3.70. $d(F_1, \Delta) \times d(F_2, \Delta) = b^2 = 9$. Chọn (B).

3.71. $OA = OB = OC = 3$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $x^2 + y^2 - 9 = 0$. Chọn (D).

3.72. Δ tiếp xúc với $C(0\ ;\ 1) \Leftrightarrow d(O\ ;\ \Delta) = 1$

$$\Leftrightarrow |m| = 1.$$

Chọn (A).

BÀI TẬP CUỐI NĂM

1. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC, biết đỉnh $A(1\ ;\ 1)$ và toạ độ trọng tâm $G(1\ ;\ 2)$. Cạnh AC và đường trung trực của nó lần lượt có phương trình là $x + y - 2 = 0$ và $-x + y - 2 = 0$. Các điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AC.

a) Hãy tìm toạ độ các điểm M và N.

b) Viết phương trình hai đường thẳng chứa hai cạnh AB và BC.

2. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $AB = AC$, $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Biết $M(1\ ;\ -1)$ là trung điểm cạnh BC và $G\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ 0\right)$ là trọng tâm tam giác ABC.

Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C.

3. Cho ba điểm $A(1\ ;\ 2), B(-3\ ;\ 1), C(4\ ;\ -2)$.

a) Chứng minh rằng tập hợp các điểm $M(x\ ;\ y)$ thoả mãn $MA^2 + MB^2 = MC^2$ là một đường tròn.

b) Tìm toạ độ tâm và bán kính của đường tròn nói trên.

4. Cho hai điểm $A(3\ ;\ -1), B(-1\ ;\ -2)$ và đường thẳng d có phương trình $x + 2y + 1 = 0$.

a) Tìm toạ độ điểm C trên đường thẳng d sao cho tam giác ABC là tam giác cân tại C.

b) Tìm toạ độ của điểm M trên đường thẳng d sao cho tam giác AMB vuông tại M.

5. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (T) có phương trình

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0.$$

a) Tìm toạ độ tâm và tính bán kính của đường tròn (T).

b) Tìm m để đường thẳng $y = x + m$ có điểm chung với đường tròn (T).

c) Viết phương trình tiếp tuyến Δ với đường tròn (T) biết rằng Δ vuông góc với đường thẳng d có phương trình $x - y + 2006 = 0$.

6. Trong mặt phẳng Oxy cho elip (E) có tiêu điểm thứ nhất là $(-\sqrt{3}\ ;\ 0)$ và đi qua điểm $M\left(1\ ;\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

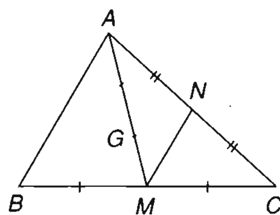
a) Hãy xác định toạ độ các đỉnh của (E).

b) Viết phương trình chính tắc của (E).

c) Đường thẳng Δ đi qua tiêu điểm thứ hai của elip (E) và vuông góc với trục Ox và cắt (E) tại hai điểm C và D. Tính độ dài đoạn thẳng CD.

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

1. a) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - 1 = \dfrac{3}{2}(1-1) \\ y_M - 1 = \dfrac{3}{2}(2-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 1 \\ y_M = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$



Hình 3.11

Vậy M có toạ độ là $\left(1\ ;\ \dfrac{5}{2}\right)$ (h.3.11).

Điểm $N(x\ ;\ y)$ thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2. \end{cases}$$

Vậy N có toạ độ là $(0\ ;\ 2)$.

b) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{NM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - 1 = 2(1-0) \\ y_B - 1 = 2\left(\dfrac{5}{2} - 2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 3 \\ y_B = 2. \end{cases}$

Đường thẳng chứa cạnh AB đi qua hai điểm $A(1 ; 1)$ và $B(3 ; 2)$ nên có phương trình : $x - 2y + 1 = 0$.

Đường thẳng chứa cạnh BC đi qua hai điểm $B(3 ; 2)$ và $M\left(1 ; \frac{5}{2}\right)$ nên có phương trình : $x + 4y - 11 = 0$.

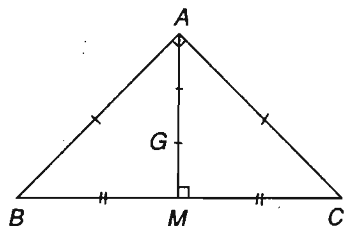
2. (Xem hình 3.12) $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - 1 = 3\left(\frac{2}{3} - 1\right) \\ y_A + 1 = 3(0+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 2. \end{cases}$

Vậy A toạ độ $(0 ; 2)$.

Đặt $B (x ; y)$ ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MA} \\ MB^2 = MA^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(0-1) + (y+1)(2+1) = 0 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1 + 9 \end{cases}$$



Hình 3.12

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 4 \\ (3y+3)^2 + (y+1)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 4 \\ 10y^2 + 20y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y = 0, & x = 4 \\ y = -2, & x = -2. \end{array}\right.$$

Vậy ta có toạ độ của B và C như sau : $B(4 ; 0)$, $C(-2 ; -2)$ hoặc $B(-2 ; -2)$, $C(4 ; 0)$.

3. a) $MA^2 + MB^2 = MC^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (x+3)^2 + (y-1)^2 = (x-4)^2 + (y+2)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 12x - 10y - 5 = 0 \Leftrightarrow (x+6)^2 + (y-5)^2 = 66$.

Vậy tập hợp các điểm M là một đường tròn.

b) Tâm là điểm $(-6 ; 5)$ bán kính bằng $\sqrt{66}$.

4. a) Đặt $C(x ; y)$, ta có : $C \in (d) \Leftrightarrow x = -2y - 1$.

Vậy $C(-2y - 1 ; y)$.

Tam giác ABC cân tại C khi và chỉ khi

$CA = CB \Leftrightarrow CA^2 = CB^2$

$\Leftrightarrow (3 + 2y + 1)^2 + (-1 - y)^2 = (-1 + 2y + 1)^2 + (-2 - y)^2$

$\Leftrightarrow (4 + 2y)^2 + (1 + y)^2 = 4y^2 + (2 + y)^2$.

Giải ra ta được $y = -\dfrac{13}{14}$.

$$x = -2\left(\frac{-13}{14}\right) - 1 = \frac{13}{7} - 1 = \frac{6}{7}.$$

Vậy C có toạ độ là $\left(\dfrac{6}{7} ; -\dfrac{13}{14}\right)$.

b) Xét điểm $M(-2t - 1 ; t)$ trên (d), ta có :

$$\widehat{AMB} = 90^\circ \Leftrightarrow AM^2 + BM^2 = AB^2$$

$$\Leftrightarrow (4 + 2t)^2 + (1 + t)^2 + 4t^2 + (2 + t)^2 = 17$$

$$\Leftrightarrow 10t^2 + 22t + 4 = 0 \Leftrightarrow 5t^2 + 11t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{1}{5} \\ t = -2. \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm thoả mãn đề bài là $M_1\left(-\dfrac{3}{5} ; -\dfrac{1}{5}\right)$ và $M_2(3 ; -2)$.

5. a) Đường tròn (T) có tâm là điểm $(2 ; 1)$ và có bán kính bằng $\sqrt{2}$.

b) $(l) : x - y + m = 0$. Ta có :

(l) có điểm chung với (T)

$\Leftrightarrow d(I, l) \leq R$

$$\Leftrightarrow \frac{|2 - 1 + m|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{2}$$

$\Leftrightarrow |m + 1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq m + 1 \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1$.

c) $\Delta \perp d$ nên Δ có phương trình $x + y + c = 0$.

Ta có : Δ tiếp xúc với (T) khi và chỉ khi

$d(I, \Delta) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|2 + 1 + c|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |c + 3| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c + 3 = 2 \\ c + 3 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = -1 \\ c = -5. \end{array}\right.$$

Vậy có hai tiếp tuyến với (T) thoả mãn đề bài là :

$\Delta_1 : x + y - 1 = 0$

$\Delta_2 : x + y - 5 = 0$.

6. a) (E) có tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}\ ;\ 0)$ nên $c = \sqrt{3}$.

Phương trình chính tắc của (E) có dạng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ta có : $M\left(1\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in (E)$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \qquad (1)$$

và $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 3$.

Thay vào (1) ta được :

$$\frac{1}{b^2+3} + \frac{3}{4b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 4b^2 + 3b^2 + 9 = 4b^2(b^2 + 3) \Leftrightarrow 4b^4 + 5b^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 1.$$

Suy ra $a^2 = 4$.

Ta có $a = 2\ ;\ b = 1$.

Vậy (E) có bốn đỉnh là : $(-2\ ;\ 0), (2\ ;\ 0)$,
$(0\ ;\ -1)$ và $(0\ ;\ 1)$.

b) Phương trình chính tắc của (E) là :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

c) (E) có tiêu điểm thứ hai là điểm $(\sqrt{3}\ ;\ 0)$. Đường thẳng Δ đi qua điểm $(\sqrt{3}\ ;\ 0)$ và vuông góc với Ox có phương trình : $x = \sqrt{3}$.

Phương trình tung độ giao điểm của Δ và (E) là :

$$\frac{3}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{2}.$$

Suy ra toạ độ của C và D là : $C\left(\sqrt{3}\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$ và $D\left(\sqrt{3}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

Vậy $CD = 1$.

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập **NGUYỄN QUÝ THAO**

Biên tập lần đầu : **ĐẶNG THỊ BÌNH - HOÀNG NGỌC PHƯƠNG**
Biên tập tái bản : **HOÀNG NGỌC PHƯƠNG**
Biên tập kĩ - mĩ thuật : **BÙI NGỌC LAN**
Trình bày bìa : **HOÀNG PHƯƠNG LIÊN**
Sửa bản in : **PHÒNG SỬA BẢN IN** (NXBGD TẠI TP.HCM)
Chế bản : **PHÒNG CHẾ BẢN** (NXBGD TẠI TP.HCM)

BÀI TẬP HÌNH HỌC 10

Mã số: CB004T1

In 50.000 cuốn (ST) khổ 17 x 24cm. In tại Công ty cổ phần In Phú Thọ.
Số in: 914. Số xuất bản: 01-2011/CXB/815-1235/GD.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2011.





SÁCH BÀI TẬP LỚP 10

1. BÀI TẬP ĐẠI SỐ 10
2. BÀI TẬP HÌNH HỌC 10
3. BÀI TẬP VẬT LÍ 10
4. BÀI TẬP HOÁ HỌC 10
5. BÀI TẬP NGỮ VĂN 10 (tập một, tập hai)
6. BÀI TẬP TIN HỌC 10
7. BÀI TẬP TIẾNG ANH 10
8. BÀI TẬP TIẾNG PHÁP 10
9. BÀI TẬP TIẾNG NGA 10

SÁCH BÀI TẬP LỚP 10 - NÂNG CAO

- BÀI TẬP ĐẠI SỐ 10
- BÀI TẬP HÌNH HỌC 10
- BÀI TẬP VẬT LÍ 10
- BÀI TẬP HOÁ HỌC 10
- BÀI TẬP NGỮ VĂN 10 (tập một, tập hai)
- BÀI TẬP TIẾNG ANH 10

Bạn đọc có thể mua sách tại :

- Các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương.
- Công ty CP Đầu tư và phát triển giáo dục Hà Nội, 187B Giảng Võ, TP. Hà Nội.
- Công ty CP Đầu tư và phát triển giáo dục Phương Nam, 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. HCM.
- Công ty CP Đầu tư và phát triển giáo dục Đà Nẵng, 15 Nguyễn Chí Thanh, TP. Đà Nẵng.

hoặc các cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam :

– Tại TP. Hà Nội : 187 Giảng Võ ; 232 Tây Sơn ; 23 Tràng Tiền ; 25 Hàn Thuyên ; 32E Kim Mã ; 14/3 Nguyễn Khánh Toàn ; 67B Cửa Bắc.
– Tại TP. Đà Nẵng : 78 Pasteur ; 247 Hải Phòng.
– Tại TP. Hồ Chí Minh : 104 Mai Thị Lựu ; 2A Đinh Tiên Hoàng, Quận 1 ; 240 Trần Bình Trọng ; 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5.
– Tại TP. Cần Thơ : 5/5 Đường 30/4.
– Tại Website bán sách trực tuyến : www.sach24.vn

Website: www.nxbgd.vn





Giá : 9.500đ